

Ecole Polytechnique Universitaire de Paris
Spécialité Electronique Informatique ELI, 3^{ème} Année

Cours de traitement du signal

SECONDE PARTIE

ZARADER J.L

2008/2009

SOMMAIRE

VII TRANSFORMEE EN Z	3
1°) DEFINITIONS	3
2°) PROPRIETES	6
3°) TRANSFORMEE EN Z INVERSE	8
4°) RELATIONS ENTRE LA TZ ET LES AUTRES TRANSFORMEES	13
VIII ANALYSE DES FILTRES NUMERIQUES	16
1°) SYSTEMES NUMERIQUES	16
2°) CLASSIFICATION DES FILTRES	19
3°) REALISATION DE FILTRES NUMERIQUES	23
4°) ANALYSE DES FILTRES NUMERIQUES.....	29
IX SYNTHESE DE FILTRES NUMERIQUES	40
1°) RAPPELS SUR LES FILTRES ANALOGIQUES.	40
2°) SYNTHESE DE FILTRE PAR TRANSFORMATION DE P EN Z.....	44
3°) SYNTHESE DE FILTRE PAR INVARIANCE TEMPORELLE.	49
4°) SYNTHESE DE FILTRE PAR INVARIANCE FREQUENTIELLE.	51
5°) BRUIT DE TRAITEMENT.....	55

VII Transformée en Z

1°) Définitions

La transformée de Fourier est un outil précieux d'analyse et de traitement des signaux. Cependant, dans certains problèmes (comme le filtrage numérique), les limites de la TF sont vite atteintes. La transformée en Z, qui s'applique aux signaux discrets, généralise la TF et permet de dépasser ces limites. Cette transformation est comparable à la Transformée de Laplace bilatérale qui généralise la TF dans le cas de systèmes continus.

Soit $x(k)$ un signal discret. Sa transformée en Z est donnée par :

$$\boxed{\text{TZ}\{x(k)\} = Z[x(k)] = X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-k}}$$

où Z est une variable complexe.

Existence de la TZ : L'existence de la TZ est obtenue grâce au critère de CAUCHY qui affirme que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k|^{\frac{1}{k}} < 1$$

En appliquant ce critère, on démontre que X(Z) existe si :

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists (R_{x+}, R_{x-}) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leq R_{x-} < |Z| < R_{x+} \\ \text{avec } R_{x-} < R_{x+} \text{ et } \begin{cases} R_{x-} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(k)|^{\frac{1}{k}} \right\} \\ R_{x+} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(-k)|^{\frac{1}{k}} \right\}} \end{cases} \end{array}}$$

Dem :

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} x(k) Z^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) Z^{-k}$$

$$X(Z) = S_1(Z) + S_2(Z)$$

$$S_2(Z) \text{ converge, d'après CAUCHY, si } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(k) Z^{-k}|^{\frac{1}{k}} \right\} < 1$$

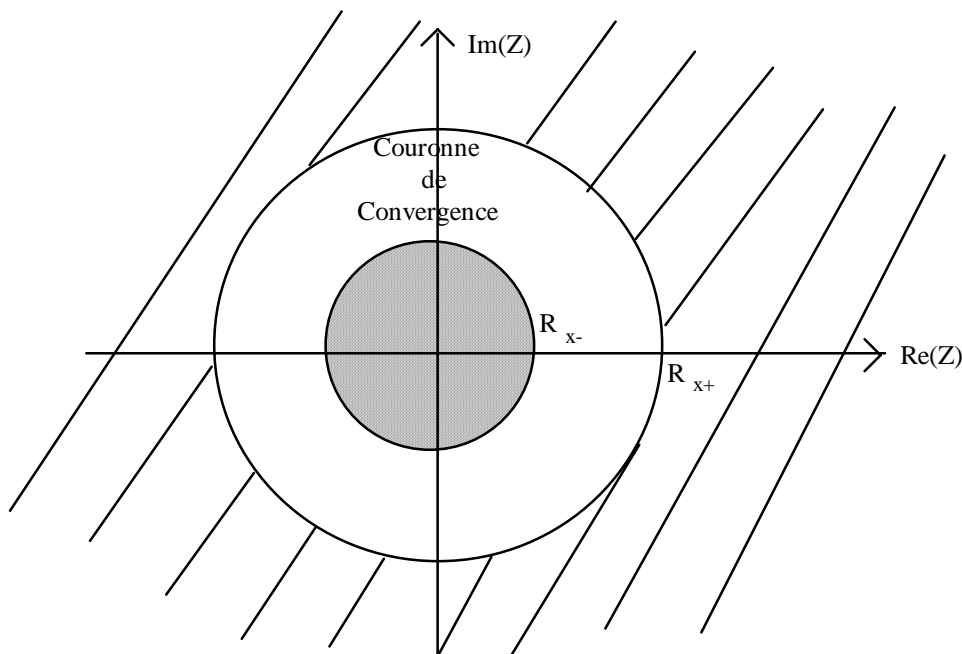
C'est à dire si $R_{x^-} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(k)|^{\frac{1}{k}} \right\} < |Z|$

De même $S_1(Z)$ converge si $\sum_{k=-\infty}^{-1} x(k) Z^{-k} = \sum_{k=1}^{+\infty} x(-k) Z^k$ converge.

C'est à dire si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(-k) Z^k|^{\frac{1}{k}} \right\} < 1$

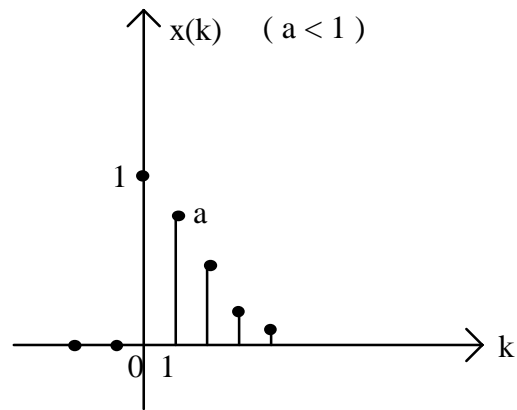
ou encore : $|Z| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(-k)|^{\frac{1}{k}} \right\}} = R_{x^+}$

En conclusion $X(Z)$ converge si Z se trouve dans la couronne de convergence.



R_{x^+} et R_{x^-} sont les rayons de convergence extérieur et intérieur.

Exemple : Considérons le signal $x(k)$ défini par $x(k) = a^k u(k)$, où a est un réel positif et $u(k)$ l'échelon unité.



$X(Z)$ s'écrit :

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (a Z^{-1})^k$$

C'est une série géométrique de raison aZ^{-1} :

$$X(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} \quad \text{si } |aZ^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |a| < |Z|$$

$$\left[\text{Rappel: } S(r) = \sum_{k=0}^{n-1} (r)^k = \frac{1 - r^n}{1 - r} \right]$$

$X(Z)$ est définie pour si $|a| < |Z| < +\infty$.

On peut vérifier que les rayons de convergence R_{x+} et R_{x-} sont :

$$R_{x+} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(-k)|^{\frac{1}{k}} \right\}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \{0\}} = +\infty$$

et :

$$R_{x-} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ |x(k)|^{\frac{1}{k}} \right\} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \{ |a| \} = |a|$$

Quelques TZ importantes

- $x(k) = u(k) = \text{échelon} \Rightarrow X(Z) = \frac{1}{1 - Z^{-1}} \quad ; \quad 1 < |Z| < +\infty$
- $x(k) = a^k u(k) \Rightarrow X(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}} \quad ; \quad |a| < |Z| < +\infty$
- $x(k) = d(k) (=1 \text{ si } k=0) \Rightarrow X(Z) = 1;$
- $x(k) = \Pi_N\left(k - \frac{N}{2}\right) \Rightarrow X(Z) = \frac{1 - Z^{-N}}{1 - Z^{-1}} \quad ; \quad 0 < |Z| < +\infty$

Remarque: Pour un signal à durée limitée, $X(Z)$ est définie pour toutes les valeurs de Z . En effet:

$$X(Z) = \sum_{k=k_1}^{k_2} x(k) Z^{-k} \text{ d'où } R_{x-} = 0 \text{ et } R_{x+} = +\infty.$$

2°) Propriétés

a°) Linéarité : Soient $X(Z)$ et $Y(Z)$ les TZ des suites $x(k)$ et $y(k)$. La TZ est linéaire.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda x(k) + y(k) \xrightarrow{\text{T.Z}} \lambda X(Z) + Y(Z)}$$

Les rayons de convergence R_+ et R_- sont :

$$R_+ = \min(R_{x+}, R_{y+}) ; R_- = \max(R_{x-}, R_{y-})$$

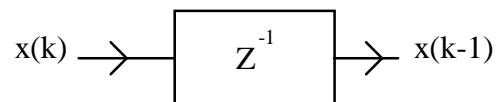
b°) Retard : Si $x(k)$ a pour transformée $X(Z)$ alors :

$$Z[x(k - k_0)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k - k_0) Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-(k+k_0)}$$

d'où :

$$\boxed{Z[x(k - k_0)] = Z^{-k_0} X(Z)}$$

Cette propriété est essentielle pour la réalisation de filtres numériques. On représente schématiquement l'opérateur retard unité Z^{-1} par :



Les rayons de convergence restent R_{x+} et R_{x-} .

c°) Changement d'échelle :

Si $X(Z) = \text{TZ}[x(k)]$ et $y(k) = a^k x(k)$ alors :

$$Y(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k x(k) Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left(\frac{Z}{a}\right)^{-k} \text{ avec } R_{x-} < \left|\frac{Z}{a}\right| < R_{x+}$$

soit :

$$\boxed{Y(Z) = X\left(\frac{Z}{a}\right)}$$

La couronne de convergence de $Y(Z)$ est donnée par :

$$R_{y+} = |a| R_{x+} \text{ et } R_{y-} = |a| R_{x-}$$

d°) Dérivation de la TZ :

La dérivée de $X(Z)$ par rapport à Z s'écrit :

$$\frac{dX(Z)}{dZ} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -k x(k) Z^{-k-1} = -Z^{-1} TZ \{k x(k)\}$$

d'où :

$$\boxed{k x(k) \xrightarrow{TZ} -Z \frac{dX(Z)}{dZ}}$$

e°) Convolution :

Soit $y(k)$ le produit de convolution des signaux $x(k)$ et $h(k)$:

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) h(k - i)$$

Par transformée en Z on trouve :

$$Y(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) h(k - i) \right] Z^{-k}$$

soit encore :

$$Y(Z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k - i) Z^{-k} \right]$$

en remplaçant $k-i$ par m on obtient :

$$Y(Z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) Z^{-m} \right] Z^{-i}$$

soit :

$$\boxed{Y(Z) = H(Z)X(Z)}$$

$$\text{avec } \begin{cases} R_{y-} = \max(R_{x-}, R_{h-}) \\ R_{y+} = \min(R_{x+}, R_{h+}) \end{cases}$$

f°) Corrélation de signaux réels :

Considérons les deux signaux réels $x(k)$ et $y(k)$. Soit $S_{xy}(Z)$ la TZ de l'intercorrélation $C_{xy}(k)$:

$$S_{xy}(Z) = TZ \{C_{xy}(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) y^*(i - k) \right] Z^{-k}$$

En posant $i-k = m$ et sachant que $y(k)$ est réel, on peut écrire :

$$S_{xy}(Z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) Z^m \right] Z^{-i}$$

ou encore :

$$S_{xy}(Z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) Y\left(\frac{1}{Z}\right) Z^{-i} = X(Z) Y\left(\frac{1}{Z}\right)$$

soit :

$$\boxed{S_{xy}(Z) = X(Z) Y(Z^{-1})}$$

La région de convergence de $Y(Z^{-1})$ est donnée par $\frac{1}{R_{y+}} < |Z| < \frac{1}{R_{y-}}$

$S_{xy}(Z)$ est définie si :

$$\max\left(R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}\right) < |Z| < \min\left(R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}}\right)$$

g°) Valeur initiale :

Si $x(k)$ un signal causal :

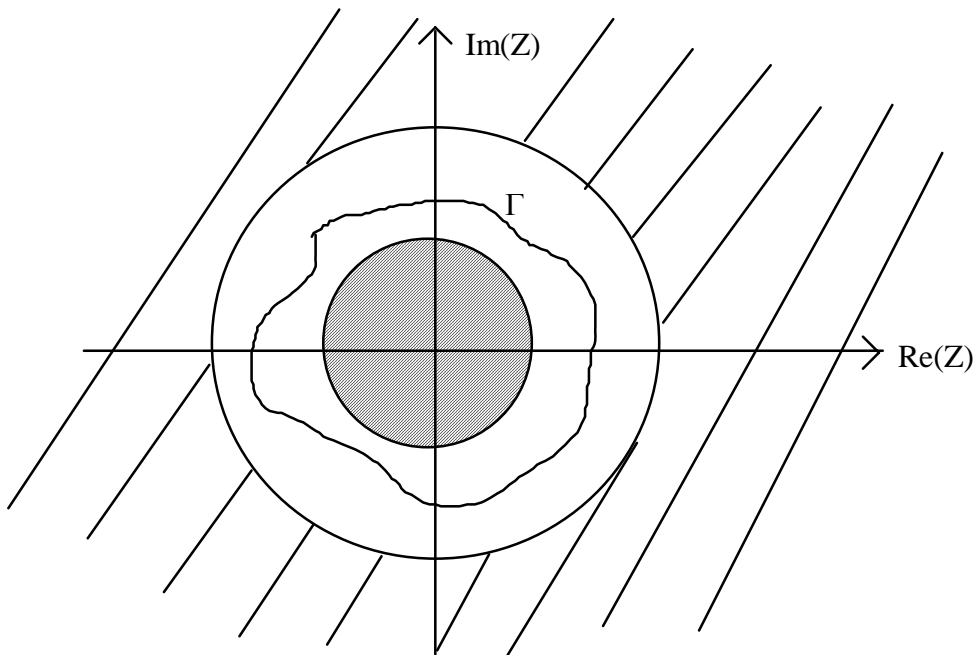
$$\lim_{Z \rightarrow +\infty} \{X(Z)\} = \lim_{Z \rightarrow +\infty} \left\{ x(0) + \frac{x(1)}{Z} + \frac{x(1)}{Z^2} + \dots \right\} = x(0)$$

3°) Transformée en Z inverse

a°) Définition :

L'expression de la transformée en Z inverse (TZ^{-1}) est obtenue à partir du théorème de CAUCHY, qui montre que l'intégrale de Z^{m-1} , sur un contour fermé Γ entourant l'origine des Z et situé dans la couronne de convergence, vaut :

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Z^{m-1} dZ = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$



En multipliant $X(Z)$ par $\frac{Z^{m-1}}{2\pi j}$ et en intégrant sur un contour fermé Γ , on trouve :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(Z) Z^{m-1} dZ = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Z^{-k+m-1} dZ \right]$$

L'intégrale entre crochets vaut 1 si $k = m$ et 0 pour toutes les autres valeurs de k , d'où :

$$x(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(Z) Z^{m-1} dZ$$

Le calcul de cette intégrale est délicat. On peut cependant calculer $x(m)$ de plusieurs façons.

b°) Méthode des résidus :

Le théorème de CAUCHY permet d'écrire que, si $G(Z)$ est définie par :

$$G(Z) = X(Z) Z^{k-1}$$

alors :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(Z) dZ = \sum \text{des résidus de } G(Z)$$

où Γ est un contour fermé qui entoure les pôles de $G(Z)$.

Si $G(Z)$ a un pôle d'ordre q en $Z = a$, le résidu Res_a^q associé à ce pôle est donnée par :

$$\boxed{\operatorname{Re} s_a^q = \lim_{Z \rightarrow a} \left\{ \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dZ^{q-1}} [G(Z) (Z-a)^q] \right\}}$$

Remarque : Pour $k \geq 1$ les pôles de $G(Z)$ et $X(Z)$ sont identiques. Si $k < 1$, $G(Z)$ a les mêmes pôles que $X(Z)$ plus un pôle en 0 d'ordre $1-k$.

Exemple

$$\text{Si } X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1} \text{ alors } G(Z) = X(Z)Z^{k-1} = \frac{Z^k}{Z-1}$$

1°) Si $k \geq 0$, $G(Z)$ n'a qu'un seul pôle en $Z = 1$:

$$x(k) = \operatorname{Re} s_1^1 = \lim_{Z \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{0!} \frac{d^0}{dZ^0} [G(Z) (Z-1)] \right\} = \lim_{Z \rightarrow 1} \{Z^k\} = 1$$

2°) Si $k < 0$, $G(Z)$ a un pôle d'ordre 1 en $Z = 1$ et un pôle d'ordre $-k$ en $Z = 0$.

$$x(k) = \operatorname{Re} s_0^{-k} + \operatorname{Re} s_1^1 = 0$$

avec :

$$\operatorname{Re} s_1^1 = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} s_0^{-k} = \lim_{Z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{(-k-1)!} \frac{d^{-k-1}}{dZ^{-k-1}} \left[\frac{1}{Z-1} \right] \right\} = -1$$

d'où :

$$x(k) = 0$$

Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x(k) = u(k) = \text{échelon}$.

c°) Développement en série entière :

On peut, par identification, trouver $x(k)$ à partir de la décomposition en série de $X(Z)$.

Exemple : Si $X(Z) = \exp(Z^{-1})$ alors :

$$X(Z) = 1 + \frac{Z^{-1}}{1!} + \frac{Z^{-2}}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} Z^{-k}$$

et :

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-k}$$

d'où :

$$x(k) = \frac{1}{k!} u(k).$$

d°) Division polynomiale :

Si $X(Z)$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle, alors la division polynomiale restitue directement les échantillons $x(k)$.

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

Exemple

Prenons, par exemple, $X(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}$

En effectuant la division polynomiale on trouve :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - aZ^{-1} \\ aZ^{-1} & \hline a^2 Z^{-2} & 1 + aZ^{-1} + a^2 Z^{-2} + a^3 Z^{-3} + \dots \\ a^3 Z^{-3} & \end{array}$$

Par récurrence on obtient :

$$x(k) = a^k u(k)$$

e°) Décomposition en éléments simples :

Soit $X(Z)$ une fraction rationnelle qui s'écrit :

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{Z - Z_i}$$

On retrouve $x(k)$ par TZ inverse des éléments $\frac{a_i}{Z - Z_i}$:

$$\text{TZ}^{-1} \left[\frac{a_i}{Z - Z_i} \right] = a_i Z_i^k u(k)$$

Exemple

$$X(Z) = \frac{1}{Z^2 - 3Z + 2} = \frac{1}{(Z - 1)(Z - 2)} = \frac{1}{Z - 2} - \frac{1}{Z - 1}$$

d'où

$$X(Z) = Z^{-1} \left[\frac{1}{1 - 2Z^{-1}} - \frac{1}{1 - Z^{-1}} \right] = Z^{-1} [\text{TZ}\{2^k u(k) - u(k)\}]$$

Z^{-1} est l'opérateur retard d'où

$$x(k) = [2^{k-1} - 1] u(k - 1)$$

f°) Relation de Parseval :

Soit $X(Z)$ la TZ du signal réel $x(k)$. On peut montrer que, si $x(k)$ est de carré sommable :

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(Z) X(Z^{-1}) \frac{dZ}{Z}}$$

Dem :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(Z) Z^{k-1} dZ \right]$$

soit encore :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(Z) \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^k \right] \frac{dZ}{Z}$$

ou :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(Z) X(Z^{-1}) \frac{dZ}{Z}$$

g°) Représentation d'un signal par ses pôles et zéros :

La transformée en z fournit, à partir des pôles et des zéros de $X(Z)$, une représentation simple du signal $x(k)$. Cette représentation est particulièrement utile pour l'étude de la stabilité des filtres numériques.

Exemple : Soit $x(k) = 2^{k+2}u(k) - u(k)$. On a :

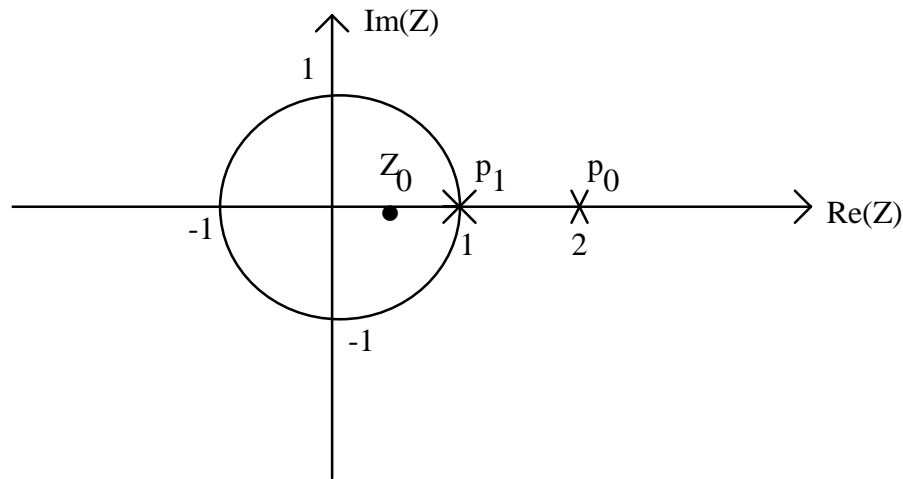
$$X(z) = \text{TZ}[2^{k+2}u(k)] - \text{TZ}[u(k)]$$

$$X(z) = \frac{4}{1 - 2Z^{-1}} - \frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{3 - 2Z^{-1}}{(1 - 2Z^{-1})(1 - Z^{-1})}$$

$X(Z)$ contient un zéro z_0 et deux pôles p_0 et p_1

$$Z_0 = \frac{2}{3}, \quad p_0=2, \quad p_1=1$$



Tous signal $x(k)$ dont la transformée en Z est rationnelle peut être représenté dans le plan des Z .

4°) Relations entre la TZ et les autres transformées

a) Relation TF-TZ.

Soit $x(t)$ un signal discret défini non-nul aux instants kT_e :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

On en déduit :

$$X(f) = \text{TF}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-2\pi jfkT_e}$$

ou encore :

$$(1) X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) (e^{2\pi jfT_e})^{-k}$$

Soit $X(Z)$ la TZ de la suite $x(kT_e)$ on a :

$$(2) X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) Z^{-k}$$

En comparant les équations (1) et (2), on trouve :

$$X(f) = X(Z) \Big|_{Z = e^{2\pi jfT_e}}$$

La TF est donc obtenue en parcourant la TZ sur le cercle unité.

Remarque: En posant $Z = e^{2\pi j(f + \frac{1}{T_e})T_e}$, on retrouve la relation $X(f + \frac{1}{T_e}) = X(f)$.

b°) Relation TL-TZ.

La Transformée de Laplace bilatérale (TL) du signal discret $x(t)$ est donnée par.

$$X(p) = \text{TL} \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

où p est une variable complexe qui s'écrit $p = \sigma + j2\pi f$

En remplaçant $x(t)$:

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \right] e^{-pt} dt$$

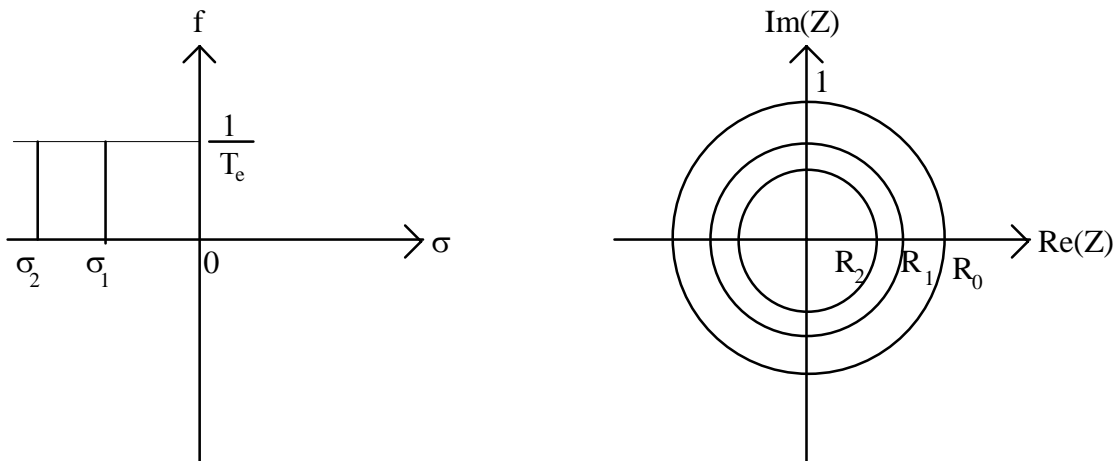
$$X(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-pt} dt \right]$$

$$X(p) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) (e^{pT_e})^{-k}$$

en comparant entre $X(p)$ et $X(Z)$ on obtient :

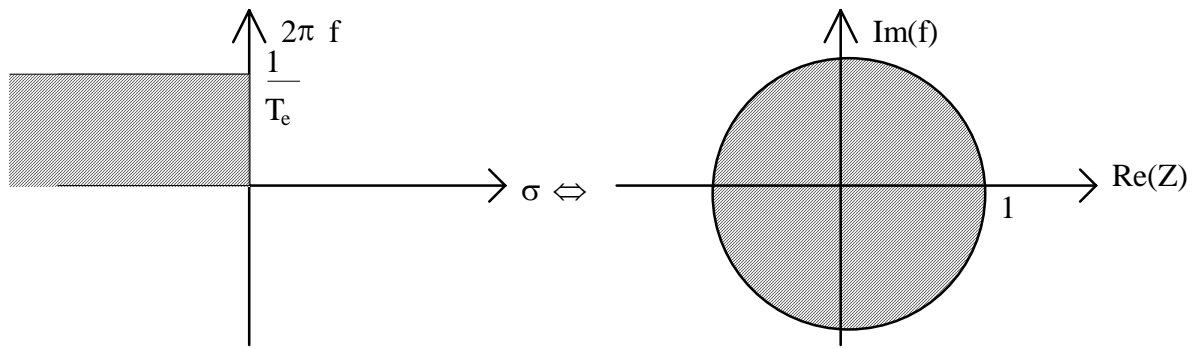
$$X(p) = X(Z) \Big|_{Z = e^{pT_e}}$$

La relation entre Z et p est : $Z = e^{pT_e} = e^{\sigma T_e} e^{j2\pi f T_e}$



Le segment de droite défini par $\sigma_0 = 0$ et $f \in [0, 1/T_e]$ se projette dans le plan des Z sur le cercle de rayon $R_0 = e^{\sigma_0 T_e} = 1$. De même le segment défini par $\sigma = \sigma_1$ se projette dans le plan des Z sur le cercle de rayon $R_1 = e^{\sigma_1 T_e}$ ($R_1 < 1$ car $\sigma_1 < 0$).

Ainsi, la bande définie par $\sigma < 0$ et $f \in [0, 1/T_e]$ se projette sur le disque unité.



La relation inverse est :

$$p = \frac{\ln[Z]}{T_e} = \frac{\ln[|Z|e^{j\varphi(Z)}]}{T_e}$$

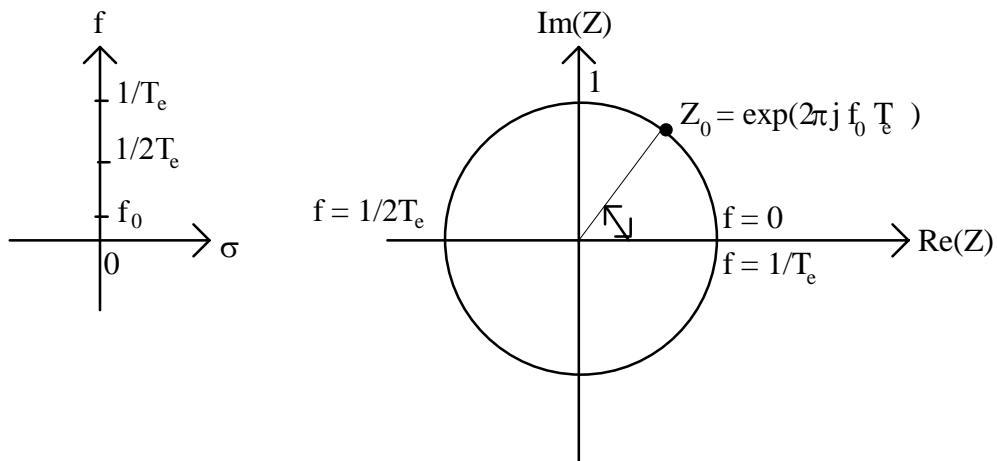
$$p = \frac{\ln[|Z|]}{T_e} + j \frac{\varphi(Z)}{T_e} = \sigma + 2\pi j f$$

d'où

$$\sigma = \frac{\ln[|Z|]}{T_e}, \quad f = \frac{\varphi(Z)}{2\pi T_e}$$

Remarque : La transformée de Fourier, qui est obtenue en parcourant les Z sur le cercle unité, correspond à la transformée de Laplace bilatérale pour $\sigma = 0$.

$$X(p)|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-2\pi j f t} dt |_{\sigma=0} = X(f)$$



VIII Analyse des filtres numériques

1°) Systèmes Numériques

a°) Définitions.

Un système ou filtre numérique S , transforme un signal d'entrée (ou excitation) $x(k)$ en un signal de sortie (ou réponse) $y(k)$:

$$y(k) = S[x(k)] \quad x(k) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(k)$$

Un système est *linéaire* si le principe de superposition s'applique. C'est à dire si :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{C}, S[\alpha x_1(k) + x_2(k)] = \alpha S[x_1(k)] + S[x_2(k)]}$$

Exemples :

Amplificateur de gain K : $S[x(k)] = Kx(k)$ (Linéaire)

Opérateur quadratique : $S[x(k)] = x^2(k)$ (Non-Linéaire)

Un système est *invariant* si pour tout retard entier k_0 appliqué à l'entrée, la sortie est retardée de k_0 :

$$\boxed{S[x(k - k_0)] = y(k - k_0)}$$

b°) Système linéaire invariant (S.L.I).

Considérons le système linéaire invariant caractérisé par la fonction $h(k)$. La relation qui lie l'entrée $x(k)$ et la sortie $y(k)$ est :

$$\boxed{y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(k - i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k - i) x(i)}$$

$h(k)$ correspond à la réponse du système à l'impulsion unité définie par :

$$d(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

La réponse $y_{\text{imp}}(k)$ s'écrit :

$$y_{\text{imp}}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) d(k - i) = h(k)$$

$h(k)$ est appelée *réponse impulsionnelle*.

Attention : La réponse impulsionnelle, dans le cas numérique, correspond à la réponse à l'impulsion unité et non pas à l'impulsion de Dirac.

Remarque : La réponse indicielle $y_{\text{ind}}(k)$ est obtenue par sommation de la réponse impulsionnelle :

$$y_{\text{ind}}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) u(k-i) = \sum_{i=-\infty}^k h(i)$$

Un système est **causal** si l'effet (la réponse) ne précède jamais la cause (l'entrée). C'est à dire si :

$$\boxed{\forall k < k_0, x(k) = 0 \Rightarrow y(k) = 0.}$$

L'impulsion unité étant nulle pour $k < 0$, un système linéaire invariant est causal si et seulement si $\forall k < 0, h(k) = 0$. Dans ce cas $y(k)$ s'écrit :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) x(k-i)$$

Un système est **stable** si pour toute entrée bornée $x(k)$, la sortie reste bornée. C'est à dire si :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R}, |x(k)| < M \Rightarrow |y(k)| < N \text{ avec } (M, N) \in \mathbb{R}^{2+}}$$

On peut montrer qu'un S.L.I est stable si et seulement si :

$$\boxed{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty.}$$

Dem :

Soit $x(k)$ un signal borné : $|x(k)| < M, \forall k \in \mathbb{R}$

- Si $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) < +\infty$ alors $|y(k)| = \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(k-i) \right|$

alors $|y(k)| \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| |x(k-i)| \leq M \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|$ donc $|y(k)| < +\infty$.

La sortie est bornée donc le système est stable.

- Réciproquement, si $|y(k)| < +\infty$ pour toute entrée $x(k)$ alors, dans le cas particulier :

$$x(k) = \begin{cases} -1 & \text{si } h(-k) < 0 \\ 1 & \text{si } h(-k) \geq 0 \end{cases} = \text{sign}(h(-k))$$

on trouve :

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(k-i)$$

d'où, pour $k=0$:

$$y(0) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) \text{sign}(h(i))$$

$$y(0) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|$$

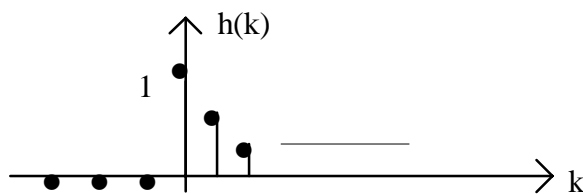
or $y(0) < +\infty$ d'où $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty$

Exemples

- Soit $h(k)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique :

$h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k)$ où $u(k)$ est l'échelon.

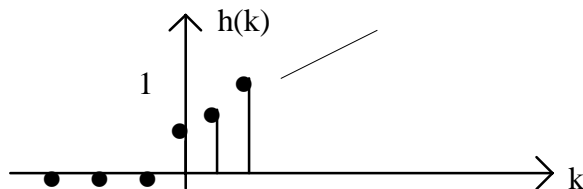
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 < +\infty$$



Le filtre est stable

- Si $h(k) = (2)^k u(k)$ alors.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \text{ diverge}$$



Le filtre est instable.

Un filtre numérique est stable si et seulement si sa fonction de transfert (ou transmittance) $H(Z)$ a ses pôles à l'intérieur du cercle unité.

Remarque: Compte tenu des relations entre la TZ et la transformée de Laplace $\left(H(p) = H(Z) \Big|_{Z=e^{pT_e}} \right)$, si $H(Z)$ est stable alors le filtre analogique correspondant $H(p)$ a ses pôles à partie réelle négative, c'est à dire dans le demi-plan gauche. $H(p)$ est donc stable. Le passage du filtre numérique au filtre analogique (ou l'inverse) s'effectue sans modifier la stabilité.

Exemple : Si $H(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}$ alors $h(k) = a^k u(k)$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k < +\infty$ si et seulement si $|a| < 1$

Réponse fréquentielle.

La réponse fréquentielle $H(f)$ est obtenue soit par transformée de Fourier de $h(k)$, soit en posant $H(f) = H(Z = e^{2\pi j f T_e})$. De manière expérimentale, la réponse fréquentielle $H(f_0)$, est obtenue lorsque l'entrée $x(k)$ est :

$$x(k) = e^{2\pi j f_0 k T_e}$$

on a alors :

$$X(f) = \delta(f - f_0)$$

et :

$$Y(f) = H(f) X(f) = H(f_0) \delta(f - f_0) \Rightarrow y(k) = H(f_0) x(k)$$

En posant $H(f_0) = |H(f_0)| e^{j\varphi(f_0)}$, on obtient $|H(f_0)|$ et $\varphi(f_0)$ en comparant les amplitudes et les phases de $y(k)$ et $x(k)$.

2°) Classification des filtres

On classe les filtres en deux grandes familles et suivant la durée de leur réponse impulsionnelle.

a) Filtres à réponse impulsionnelle finie (R.I.F)

Ces filtres sont caractérisés par des réponses impulsionnelles de durée finie :

$$\boxed{\exists (k_0, k_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall k \in]-\infty, k_0[\cup]k_1, +\infty[, h(k) = 0}$$

La réponse $y(k)$ du filtre s'écrit :

$$y(k) = \sum_{i=k_0}^{k_1} h(i) x(k - i)$$

On note, plus généralement, $k_1 = k_0 + M - 1$.

$$y(k) = \sum_{i=k_0}^{k_0+M-1} h(i) x(k - i)$$

M est la longueur du filtre.

Exemple

Soit $h(k)$ la réponse impulsionnelle définie par :

$$h(0)=2, h(1)=h(-1)=1 \text{ et } h(k)=0 \text{ ailleurs.}$$

d'où :

$$\begin{aligned} y(k) &= h(-1) x(k+1) + h(0) x(k) + h(1) x(k-1). \\ y(k) &= x(k+1) + 2 x(k) + x(k-1). \end{aligned}$$

Ce filtre est non-causal.

b) Filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I)

Dans ce cas la réponse impulsionnelle est illimitée et la réponse $y(k)$ s'écrit de manière générale :

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(k - i)$$

Si $h(k)$ est causale :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) x(k - i)$$

Exemple:

Si $h(k)=u(k)$ alors $y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(k - i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k - i) x(i)$ d'où

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^k x(i)$$

La sortie $y(k)$ est la somme des entrées $x(i)$ jusqu'à l'instant k . Ce filtre est donc de type Intégrateur.

c) Equation aux différences

Les filtres réalisables vérifient une équation appelée équation aux différences (ou équation de récurrence), qui relie l'entrée et la sortie de filtre :

$$\boxed{\sum_{i=0}^N a_i y(k-i) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) \text{ avec } (a_i, b_n) \in \mathbb{R} \text{ avec } a_0 = 1}$$

Les a_i et b_n sont les coefficients du filtre. N est l'ordre du filtre. Comme pour les filtres analogiques, on dit que le filtre est "physiquement réalisable" si $N \geq M$. Dans la pratique (réalisation du filtre numérique) cette condition n'est pas nécessaire.

On utilise plus fréquemment l'écriture suivante :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i) \text{ avec } a_0 = 1:$$

Important: Dans le cas d'un filtre R.I.F, la réponse impulsionnelle est égale aux coefficients de l'équation de récurrence. En effet, on a d'une part :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M h(n) x(k-n)$$

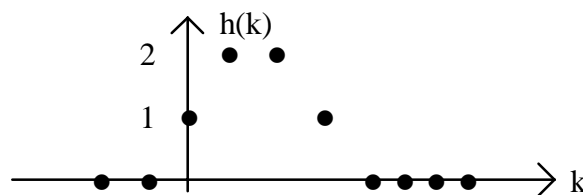
et d'autre part :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) \text{ avec } \forall i \neq 0, a_i = 0 \text{ et } a_0 = 1,$$

d'où $b_n = h(n)$

Exemple : 1°) Si $y(k) = x(k) + 2x(k-1) + 2x(k-2) + x(k-3)$ alors :

$h(0) = 1, h(1) = h(2) = 2, h(3) = 1$ et $h(k) = 0, \forall k \neq 0, 1, 2, 3$.



Remarque : Un filtre R.I.F est toujours stable. Sa fonction de transfert s'écrit :

$$H(Z) = \sum_{n=0}^M b_n Z^{-n}$$

Il n'y a aucun pôle et la série $\sum_{n=0}^M |b_n| = \sum_{n=0}^M |h(n)|$ converge toujours.

2°) Considérons maintenant le filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I) $h(k) = u(k)$:

$$y(k) = \sum_{h=0}^{+\infty} x(k - i) \quad \text{et} \quad H(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) Z^{-i} = \sum_{i=0}^{+\infty} Z^{-i} = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$$

L'équation de récurrence s'écrit :

$$y(k) = x(k) + y(k-1)$$

d) Fonction de transfert et réponse fréquentielle

La fonction de transfert $H(Z)$ et la réponse fréquentielle $H(f)$ sont obtenues à partir de l'équation de récurrence par :

$$\text{TZ} \left[\sum_{i=0}^N a_i y(k - i) \right] = \left[\sum_{n=0}^M b_n x(k - n) \right]$$

d'où :

$$\sum_{i=0}^N a_i \text{TZ}[y(k - i)] = \sum_{n=0}^M b_n \text{TZ}[x(k - n)]$$

soit encore :

$$Y(Z) \left(\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i} \right) = X(Z) \left(\sum_{n=0}^M b_n Z^{-n} \right)$$

et :

$$(1) \quad H(Z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n Z^{-n}}{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}} = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$$

La réponse fréquentielle $H(f)$ est alors :

$$H(f) = H(Z = e^{2\pi j f T_e}) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-2\pi j n f T_e}}{\sum_{i=0}^N a_i e^{-2\pi j i f T_e}}$$

On déduit de la relation (1) qu'un filtre, de fonction de transfert rationnelle $H(Z)$, est stable si les racines de l'équation

caractéristique $\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i} = 0$ sont dans le cercle unité.

Remarque: On dit qu'un filtre est purement récursif (ou Autorégressif : AR) si $H(Z)$ s'écrit :

$$H(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}} \quad \text{avec} \quad a_0 = 1$$

C'est à dire si l'équation de récurrence est :

$$y(k) = x(k) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i)$$

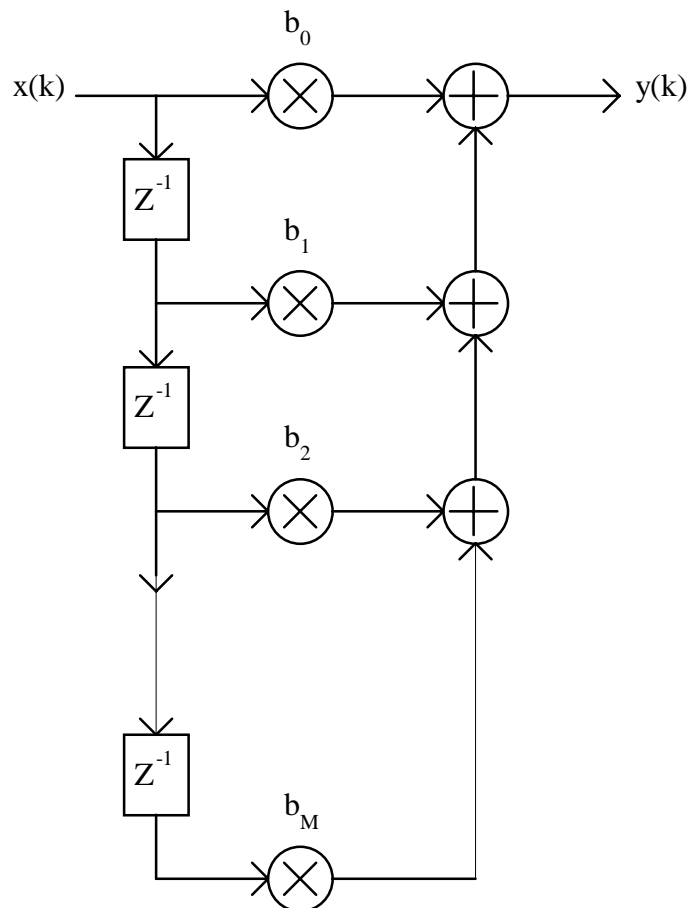
3°) Réalisation de filtres numériques

On distingue deux types de réalisations : transverse ou récursive. Ces réalisations sont effectuées à partir de circuits numériques de base (sommateur, bascule, multiplieurs, ...)

a) Réalisation transverse (ou non-récursive)

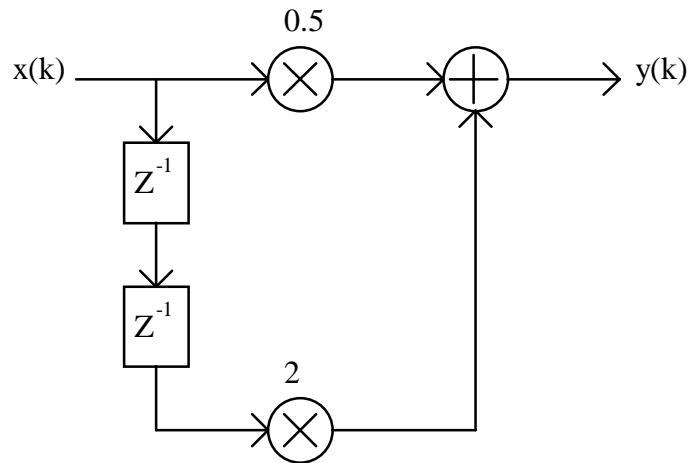
Cette réalisation est dite non-récursive ou transverse car elle ne fait apparaître aucun bouclage de la sortie sur l'entrée. Elle est associée **exclusivement** aux filtres R.I.F. La relation de récurrence est :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) \quad \text{d'où} \quad H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \sum_{n=0}^M b_n Z^{-n}$$



Exemple :

$H(Z) = 0.5 + 2Z^{-2}$ donc $b_0 = 0.5$, $b_1 = 0$ et $b_2 = 2$ et $y(k) = 0.5 x(k) + 2x(k-2)$



b) Réalisation récursive

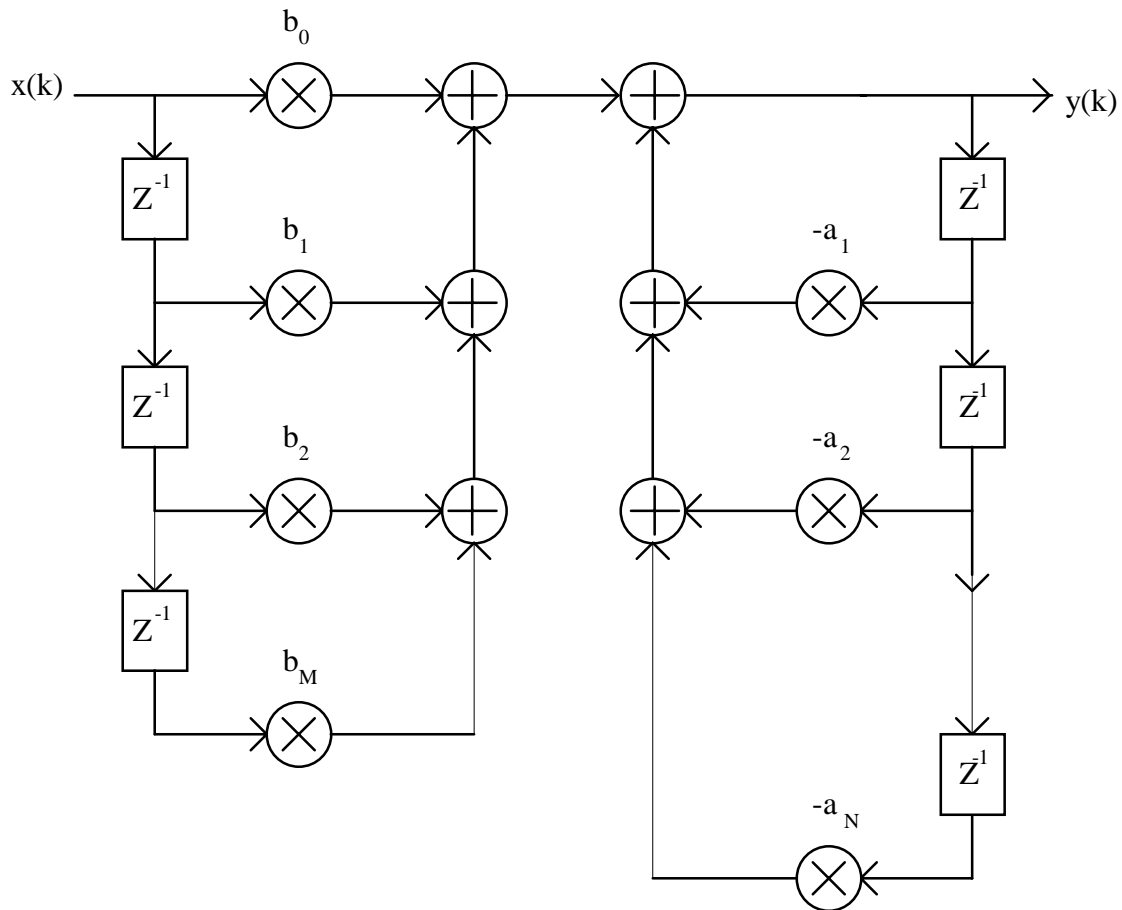
Ces réalisations sont utilisées lorsque la sortie à l'instant k dépend de l'entrée et de la sortie aux instants précédents. L'équation aux différences est :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i)$$

et :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n Z^{-n}}{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}} \quad \text{avec } a_0 = 1$$

Une réalisation possible de ces filtres est la suivante :

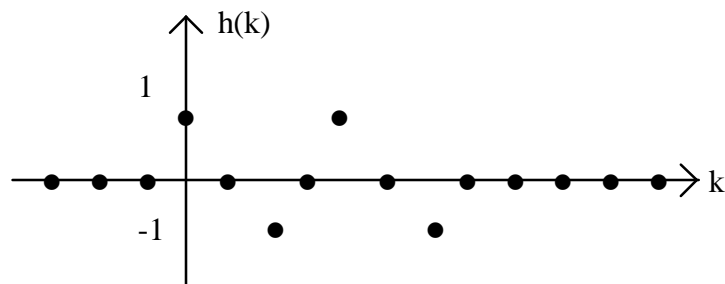


Attention : Une réalisation récursive peut s'appliquer à un filtre RII ou RIF. Certains auteurs associent, à tort, RII-Récuratif

Exemple:

Considérons le filtre à réponse impulsionnelle finie $h(k)$:

$h(0)=h(4)=1$, $h(2)=h(6)=-1$, $h(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}-(0, 2, 4, 6)$.



Ce filtre peut être réalisé sous forme transverse :

$$H(Z) = \sum_{k=0}^6 h(k) Z^{-k} = 1 - Z^{-2} + Z^{-4} - Z^{-6}$$

soit :

$$y(k) = x(k) - x(k-2) + x(k-4) - x(k-6)$$

On peut aussi donner une forme récursive à ce filtre :

$$H(Z) = \sum_{k=0}^3 (-Z^{-2})^k = \frac{1 - (-Z^{-2})^4}{1 - (-Z^{-2})} = \frac{1 - Z^{-8}}{1 + Z^{-2}}$$

La nouvelle équation de récurrence est :

$$y(k) = x(k) - x(k-8) - y(k-2) \quad (\text{forme récursive})$$

Structure canonique d'un filtre récursif

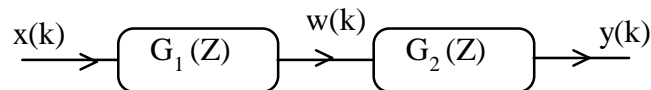
Nous avons vu que la réalisation d'un filtre récursif nécessite $N+M$ retards. Il est souvent utile, pour des raisons de coût ou d'intégration, de diminuer le nombre de retards. Nous allons montrer que l'on peut ramener ce nombre à N , en supposant $N \geq M$.

Soit $H(Z)$ la fonction de transfert :

$$H(Z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n Z^{-n}}{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}} = G_1(Z) G_2(Z)$$

avec $a_0 = 1$, $G_1(Z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}$ et $G_2(Z) = \sum_{n=0}^M b_n Z^{-n}$

$G_1(Z)$ est un filtre purement récursif et $G_2(Z)$ un filtre transverse. Soit $w(k)$ la sortie de $G_1(Z)$, on a :



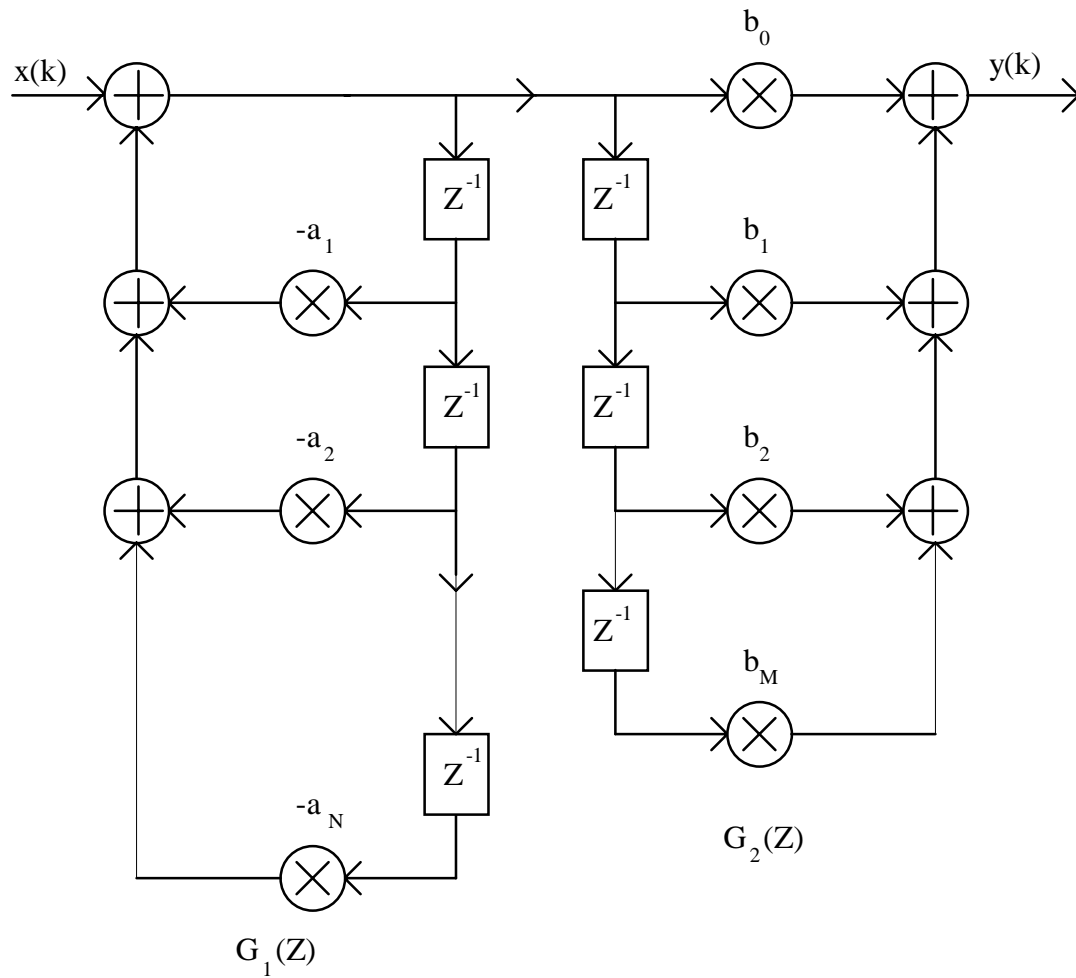
Les relations entre $x(k)$, $w(k)$ et $y(k)$ sont :

$$\begin{cases} W(Z) = G_1(Z) X(Z) \\ Y(Z) = G_2(Z) W(Z) \end{cases}$$

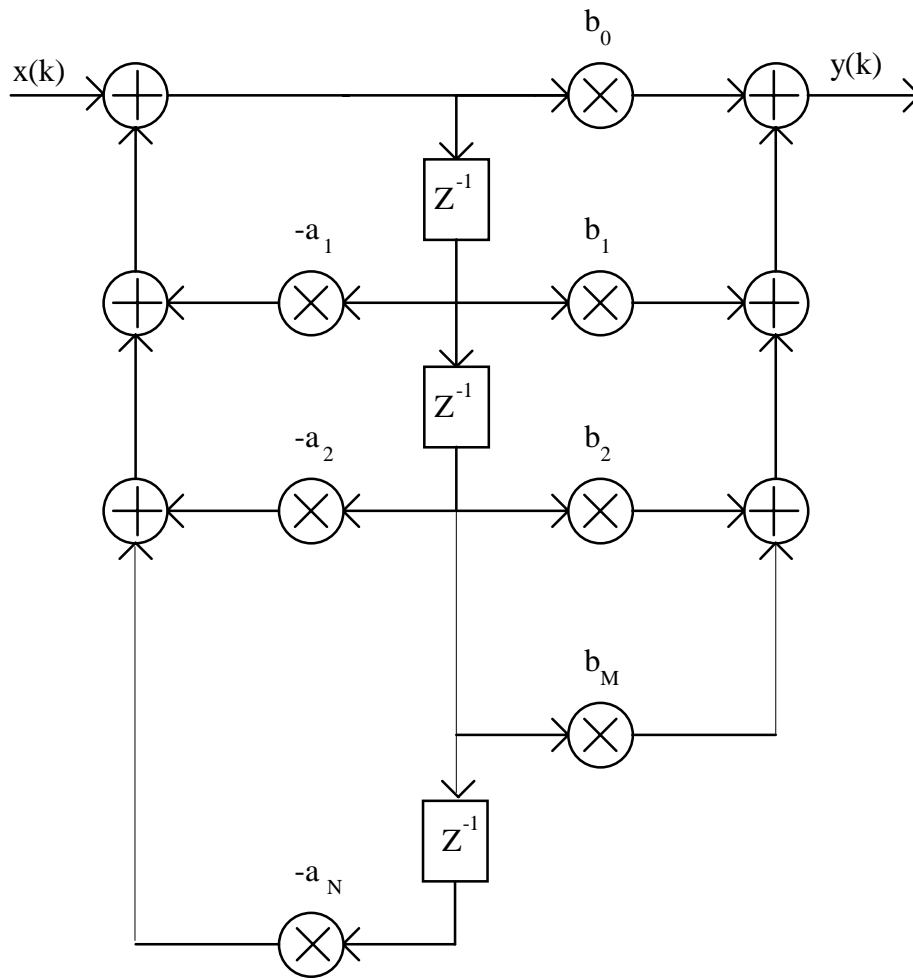
d'où :

$$\begin{cases} w(k) = x(k) - \sum_{i=1}^N a_i w(k-i) \\ y(k) = \sum_{n=0}^M b_n w(k-n) \end{cases}$$

On peut réaliser $H(Z)$ de la façon suivante :



où encore, en regroupant les sorties retardées $w(k-i)$, utilisées dans les deux filtres $G_1(Z)$ et $G_2(Z)$:



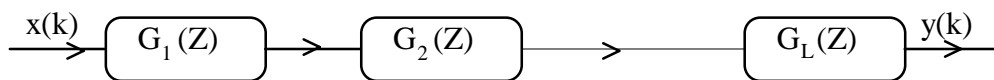
Cette réalisation est sous *forme canonique* ne comporte plus que N retards.

Forme série (ou cascade)

Si la fonction de transfert $H(Z)$ s'écrit :

$$H(Z) = G_1(Z) G_2(Z) \dots G_L(Z) = \prod_{i=1}^L G_i(Z)$$

la réalisation du filtre est:

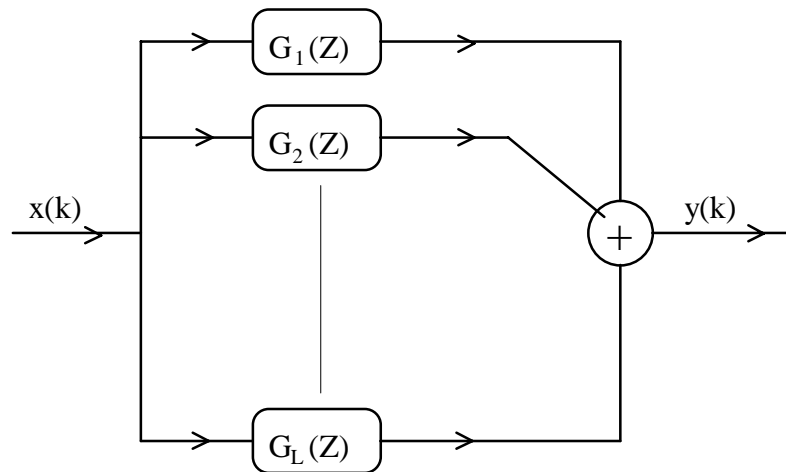


Forme parallèle:

Si $H(Z)$ s'écrit :

$$H(Z) = G_1(Z) + \dots + G_L(Z) = \sum_{i=1}^L G_i(Z)$$

alors :



4°) Analyse des filtres numériques

L'analyse d'un filtre numérique consiste à extraire les principales caractéristiques de ce filtre, qui sont :

- La fonction de transfert $H(Z)$.
- Les réponses temporelles (impulsionnelle, indicielle).
- La stabilité.
- La réponse fréquentielle $H(f)$ et la nature du filtre.

Nous allons illustrer ces différents points en étudiant en détail un filtre premier ordre.

a) Filtre du premier ordre

Considérons le filtre défini par l'équation de récurrence :

$$y(k) = ay(k-1) + x(k) \text{ avec } \begin{cases} a \neq 1 \\ a > 0 \end{cases}$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert $H(Z)$ est obtenue en appliquant la TZ aux deux membres de l'équation on obtient :

$$Y(Z) = aZ^{-1}Y(Z) + X(Z)$$

soit :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}$$

Réponses temporelles

Réponse impulsionnelle :

La réponse impulsionnelle peut être obtenue de deux façons. Soit par programmation directe, soit par TZ inverse.

La programmation directe consiste à utiliser l'équation aux différences et à remplacer $x(k)$ par l'impulsion unité $d(k)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall k < 0, \quad y(k) &= 0 \\ k = 0, \quad y(0) &= ay(-1) + x(0) = d(0) = 1 \\ k = 1, \quad y(1) &= ay(0) + x(1) = ay(0) = a \\ k = 2, \quad y(2) &= ay(1) + x(2) = ay(1) = a^2 \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve :

$$\forall k > 0, \quad y(k) = a^k$$

d'où :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad y(k) = a^k u(k)$$

On peut obtenir ce résultat plus directement en calculant la TZ inverse de $H(Z)$. En effet, si $x(k)=d(k)$ alors $X(Z)=1$, d'où :

$$Y(Z) = H(Z)X(Z) = \frac{1}{1 - aZ^{-1}}$$

par suite :

$$y(k) = a^k u(k).$$

Réponse indicielle :

En ce qui concerne la réponse indicielle on peut procéder de même façon. C'est à dire soit par programmation directe en remplaçant $x(k)$ par $u(k)$, soit par TZ inverse de :

$$Y(Z) = H(Z)X(Z) = \frac{H(Z)}{1 - Z^{-1}}$$

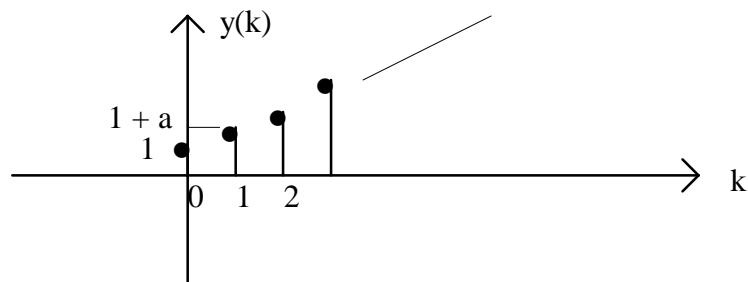
soit :

$$Y(Z) = \frac{1}{(1 - aZ^{-1})(1 - Z^{-1})} = \left[\frac{1}{1 - Z^{-1}} - \frac{a}{1 - aZ^{-1}} \right] \frac{1}{1 - a}$$

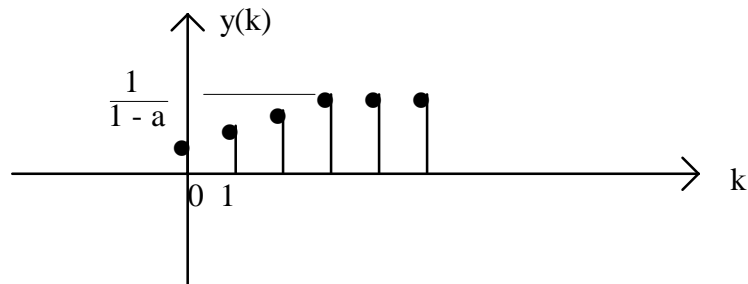
et :

$$y(k) = \frac{1}{1 - a} [1 - a^{k+1}] u(k)$$

- Si $a > 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \{y(k)\} = +\infty$



- Si $a < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \{y(k)\} = \frac{1}{1-a}$



On peut aussi calculer la réponse indicielle en sommant la réponse impulsionnelle :

$$y(0) = h(0) = 1$$

$$y(1) = h(0) + h(1) = 1 + a$$

$$y(2) = h(0) + h(1) + h(2) = 1 + a + a^2$$

d'où :

$$\forall k > 0 \quad y(k) = \sum_{i=0}^k h(i) = \sum_{i=0}^k a^i = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} u(k)$$

Réponse à une entrée quelconque :

De manière générale, pour une entrée $x(k)$ quelconque on peut calculer $y(k)$ soit par programmation directe, soit par calcul de la TZ inverse.

Stabilité

On peut étudier la stabilité du filtre à partir de la position des pôles de $H(Z)$. Pour ce premier ordre on a un seul pôle p_0 :

$$1 - ap_0^{-1} = 0 \Leftrightarrow p_0 = a$$

Le filtre est donc stable si $|p_0| < 1$ c'est à dire si $a < 1$.

Il est aussi possible d'étudier la stabilité à partir de la réponse impulsionnelle. En effet :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = \sum_{i=0}^{+\infty} a^i = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

On retrouve la même condition de stabilité.

Réponse fréquentielle et nature du filtre

On peut calculer la réponse fréquentielle $H(f)$ par transformation de Fourier de $h(k)$. Cependant, on l'obtient plus facilement en posant :

$$H(f) = H(Z) \Big|_{Z = e^{+2\pi j f T_e}}$$

Dans le cas du premier 1^{er} ordre :

$$H(f) = \frac{1}{1 - a e^{-2\pi j f T_e}}$$

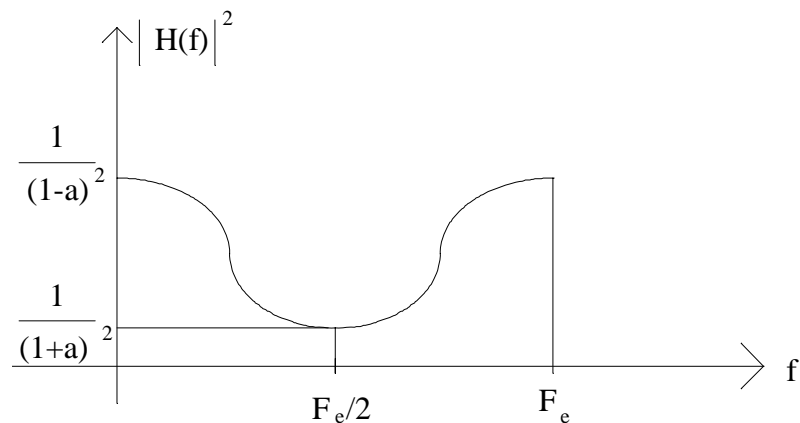
ou encore $H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)}$ avec :

$$H(f) = \frac{e^{j\varphi(f)}}{\sqrt{1 + a^2 - 2 a \cos(2\pi f T_e)}}$$

et :

$$\begin{cases} \varphi(f) = \text{Arctg} \left[\frac{a \sin(2\pi f T_e)}{1 - a \cos(2\pi f T_e)} \right] \\ |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + a^2 - 2 a \cos(2\pi f T_e)} \end{cases}$$

Pour tracer $|H(f)|^2$ on s'intéresse à la bande $[0, F_e]$, car $H(f + F_e) = H(f)$



Important: D'une façon plus générale, si le filtre à des coefficients réels alors sa réponse impulsionnelle est réelle. D'après les propriétés de la transformée de Fourier, on en déduit que $H(-f) = H^*(f)$ d'où :

$$\begin{cases} |H(f)| = |H(-f)| \\ \varphi(f) = -\varphi(-f) \end{cases}$$

Comme de plus les signaux sont échantillonnés on a :

$$H(f) = H(f + F_e)$$

d'où :

$$H(F_e - f) = H(-f) = H^*(f)$$

Par suite :

$$\begin{cases} |H(f)| = |H(F_c - f)| \\ \varphi(f) = -\varphi(F_c - f) \end{cases}$$

On peut donc, dans le cas d'un filtre à coefficients réels, restreindre l'étude à la bande $[0, F_c/2]$. Ceci est cohérent avec le fait que le signal d'entrée est échantillonné à une fréquence F_c . Sa fréquence maximale est $F_c/2$.

Pour finir, on définit le *gain statique* G_s par :

$$G_s = H(p=0) = H(f=0) = H(Z=1)$$

Dans le cas d'un premier ordre le gain statique est :

$$G_s = \frac{1}{1 - a}$$

L'étude de la réponse fréquentielle permet de déterminer la fonction du filtre. On constate que ce filtre amplifie les basses fréquences et atténue les hautes fréquences. C'est donc un filtre passe-bas.

b) Stabilité des filtres du second ordre

On peut, dans tous les cas, décomposer la fonction de transfert rationnelle $H(Z)$ d'un filtre, en un produit de fonctions de transfert $G_i(Z)$ d'ordre 1 ou 2 :

$$H(Z) = \prod_{i=1}^n G_i(Z)$$

Le cas où $G_i(Z)$ est d'ordre 1 ayant déjà été traité, nous allons nous intéresser au cas où $G_i(Z)$ est d'ordre 2, c'est à dire si :

$$G_i(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2}}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}}$$

L'étude de la stabilité peut s'effectuer dans le plan (a_1, a_2) . En effet on sait que a_2 est le produit des pôles Z_1 et Z_2 qui sont complexes conjugués. D'où :

$$a_2 = Z_1 Z_2 = |Z_1|^2 < 1$$

Une première condition de stabilité est donc :

$$(1) \quad a_2 < 1$$

De plus les pôles sont réels si $a_2 < \frac{a_1^2}{4}$ et complexes dans le cas contraire. La parabole d'équation :

$$(2) \quad a_2 = \frac{a_1^2}{4}$$

porte les pôles doubles. Supposons les pôles réels :

$$\begin{cases} Z_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \\ Z_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \end{cases}$$

Le filtre est stable si :

$$-1 < Z_2 < Z_1 < 1$$

C'est à dire si :

$$\begin{cases} -1 < -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \\ 1 > -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a_1^2 - 4a_2 < (2 - a_1)^2 \\ a_1^2 - 4a_2 < (2 + a_1)^2 \end{cases}$$

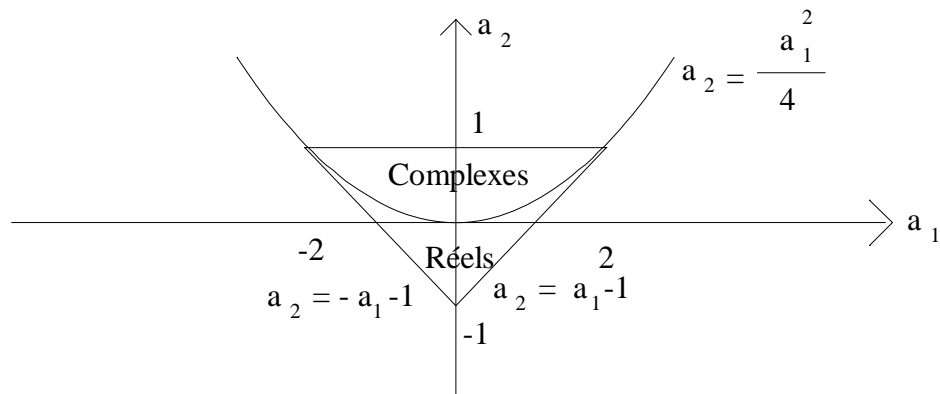
ou encore :

$$(3) \quad \begin{cases} a_2 > -1 + a_1 \\ a_2 > -1 - a_1 \end{cases}$$

Le domaine de stabilité dans le plan des coefficients (a_1, a_2) est délimité par les trois droites obtenues à partir des relations (1) et (3) :

$$a_2 = 1 ; a_2 = -1 + a_1 ; a_2 = -1 - a_1$$

De plus la parabole obtenue en (2) est la frontière entre les pôles complexes et réels



Le filtre est stable si les coefficients a_1 et a_2 se trouvent à l'intérieur du triangle.

c°) Filtres couramment utilisés.

Filtres à phase linéaire.

Un filtre est caractérisé par le module et la phase de sa réponse fréquentielle $H(f)$:

$$H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)}$$

On définit le temps de propagation de groupe (ou retard) $\tau(f)$ par :

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df}$$

Le filtre est à *phase linéaire* si $\tau(f)$ est constant. Dans ce cas :

$$\varphi(f) = -2\pi f\tau + \varphi_0$$

Cette caractéristique est souvent recherchée car elle permet d'avoir un retard constant τ quelque soit la fréquence du signal d'entrée.

Pour un filtre R.I.F on peut montrer que la phase est linéaire si les coefficients sont symétriques :

$$\boxed{b_i = b_{M-i}}$$

En effet la fonction de transfert s'écrit :

$$H(Z) = \sum_{i=0}^M b_i Z^{-i}$$

Si $M=2P$ alors :

$$H(Z) = b_p Z^{-P} + \sum_{i=0}^{P-1} b_i [Z^{-i} + Z^{-(M-i)}]$$

$$H(Z) = Z^{-P} \left[b_P + \sum_{i=0}^{P-1} b_i [Z^{P-i} + Z^{i-P}] \right]$$

d'où :

$$H(f) = e^{-2\pi j f P T_e} \left[b_P + 2 \sum_{i=0}^{P-1} b_i \cos(2\pi f (P-i) T_e) \right]$$

Suivant le signe de l'expression entre crochets, la phase $\varphi(f)$ vaut:

$$\begin{cases} \varphi(f) = -2\pi f P T_e \\ \text{ou} \\ \varphi(f) = -2\pi f P T_e + \pi \end{cases}$$

La phase est linéaire et le temps de propagation est constant :

$$\tau = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df} = P T_e$$

On peut montrer de même que si M est impair ($M=2P+1$) alors

$$\tau = \left(P + \frac{1}{2} \right) T_e$$

Filtres à déphasage minimal.

Lors de la réalisation d'un filtre numérique, le cahier des charges porte le plus souvent sur la fonction du filtre (Passe-Haut, Passe-Bande, ..). C'est à dire sur le module $|H(f)|$ de la réponse fréquentielle. Cependant, pour certaines applications, la variation de la phase, pour une variation de fréquence donnée, doit être minimale. Ces filtres sont appelés filtre à *déphasage minimal*. On peut montrer qu'un filtre stable est à déphasage minimal si ses zéros sont dans le cercle unité.

Exemple:

Considérons les deux filtres $H_1(Z)$ et $H_2(Z)$ définis par :

$$H_1(Z) = \frac{1 - 0,2Z^{-1}}{1 - 0,5Z^{-1}} \quad ; \quad H_2(Z) = \frac{1 - 0,2Z}{1 - 0,5Z^{-1}}$$

$H_1(Z)$ et $H_2(Z)$ sont stables ($p_0 = 0,5$). De plus les réponses fréquentielles $H_1(Z)$ et $H_2(Z)$ sont telles que :

$$|H_1(f)| = |H_2(f)| = \sqrt{\frac{1,04 - 0,4\cos(2\pi f T_e)}{1,25 - \cos(2\pi f T_e)}}$$

$$\varphi_1(f) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{0,2\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,2\cos(2\pi fT_e)}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{0,5\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,5\cos(2\pi fT_e)}\right)$$

$$\varphi_2(f) = - \operatorname{Arctg}\left(\frac{0,2\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,2\cos(2\pi fT_e)}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{0,5\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,5\cos(2\pi fT_e)}\right)$$

Ces filtres ne diffèrent que par leur réponse en phase. Si l'on fait varier f de 0 à $F_c/4$, les phases $\varphi_1(f)$ et $\varphi_2(f)$ varient respectivement de 0 à -15° et de 0 à -37° . De plus les zéros de $H_1(Z)$ et $H_2(Z)$ sont respectivement 0,2 et $1/0,2 = 5$. $H_1(Z)$ est à déphasage minimal.

Filtres Passe-Tout.

Ces filtres $H_{pt}(Z)$ ne modifient que la phase des signaux d'entrée :

$$|H_{pt}(f)| = 1$$

Ils sont couramment utilisés pour modifier le comportement de certains systèmes numériques en éliminant, par exemple, les pôles instables.

Exemple

Au premier ordre, ces filtres sont définis par :

$$H_{pt}(Z) = \frac{Z^{-1} - a}{1 - aZ^{-1}} \quad \text{avec } a < 1$$

Le zéros Z_0 vaut $\frac{1}{a}$ et le pôle $p_0 = a$.

$$|H_{pt}(f)| = \left| \frac{e^{-2\pi j f T_e} - a}{1 - a e^{-2\pi j f T_e}} \right| = 1$$

$$\varphi_{pt}(f) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{\sin(2\pi f T_e)}{a - \cos(2\pi f T_e)}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{a \sin(2\pi f T_e)}{1 - a \cos(2\pi f T_e)}\right)$$

Filtres Moyenneurs.

Ces filtres effectuent une moyenne glissante sur le signal. L'équation de récurrence est :

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(k - i)$$

La fonction de transfert est :

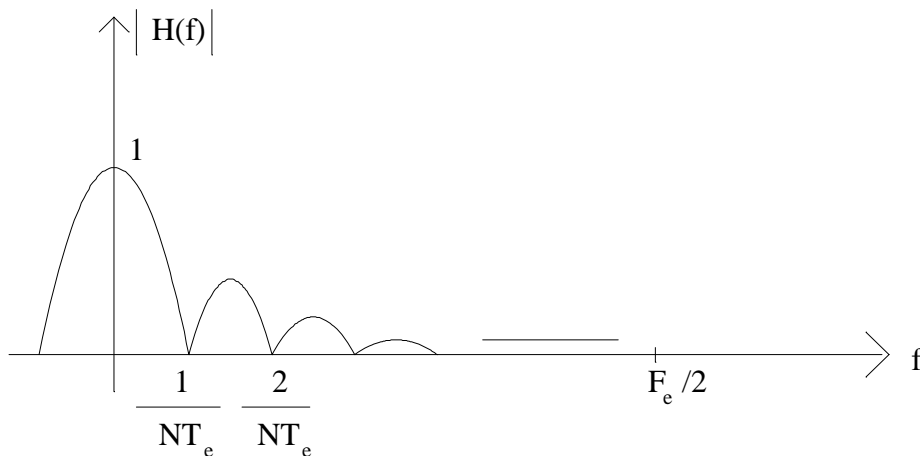
$$H(Z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Z^{-i} = \frac{1}{N} \frac{1 - Z^{-N}}{1 - Z^{-1}}$$

La forme récursive obtenue pour $H(Z)$ conduit à une nouvelle expression de l'équation de récurrence :

$$y(k) = y(k-1) + \frac{x(k) - x(k-N)}{N}$$

La réponse fréquentielle s'écrit :

$$H(f) = \frac{1 - e^{-2\pi j f N T_e}}{1 - e^{-2\pi j f T_e}} = e^{-\pi j f (N-1) T_e} \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N T_e)}{\sin(\pi f T_e)}$$



C'est un filtre passe-bas. Le lissage du signal d'entrée $x(k)$ sera d'autant plus important que N sera grand.

Le gain statique G_s vaut : $G_s = H(Z=1) = 1$.

C'est un filtre à réponse impulsionnelle finie :

$$h(k) = \frac{1}{N} \prod_{\frac{N}{2}} \left(k - \frac{N}{2} \right)$$

C'est un filtre à phase linéaire. Le temps de propagation τ est de $\left(\frac{N-1}{2}\right) T_e$.

Filtre en peigne.

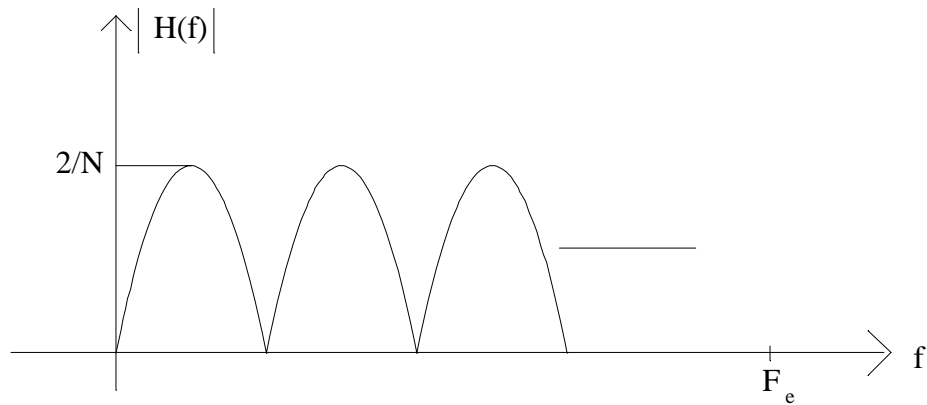
Le filtre dont la fonction de transfert s'écrit

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-N}}{N}$$

est appelé filtre en peigne à cause de sa représentation fréquentielle :

$$H(f) = \frac{1 - e^{-2\pi j f N T_e}}{N} = e^{-\pi j f N T_e + j \frac{\pi}{2}} \frac{2}{N} \sin(2\pi f N T_e)$$

d'où :



Sa réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(0) = -h(N) = \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad h(k) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq 0 \quad \text{et} \quad k \neq N$$

Son équation aux différences est :

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k - N)}{N}$$

C'est un filtre à phase linéaire : $\tau = (N T_e) / 2$

IX Synthèse de filtres Numériques

1°) Rappels sur les filtres analogiques.

Filtre idéal

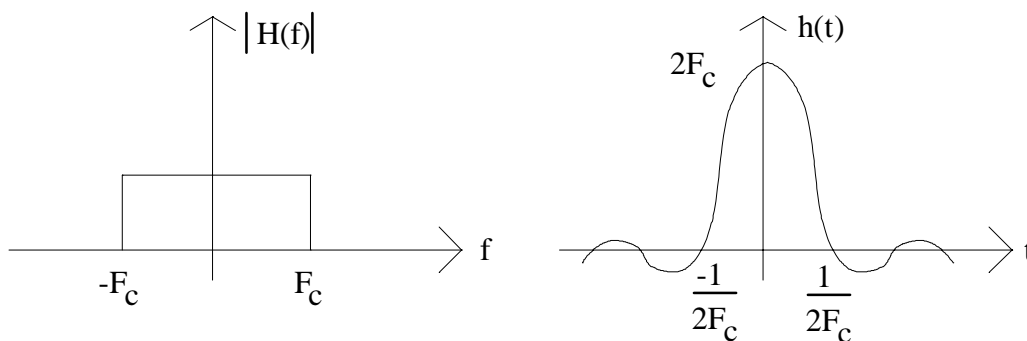
Un filtre idéal est généralement représenté, en fréquences, par une ou plusieurs fonctions portes.

Exemple :

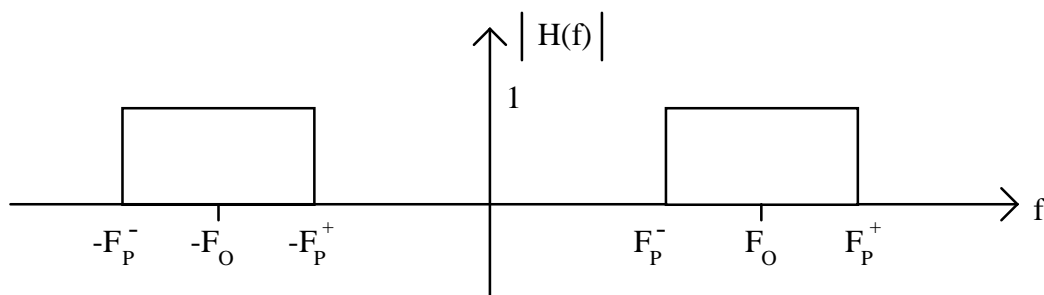
-Considérons le filtre passe-bas de réponse fréquentielle $H(f)$ et de réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)} \text{ avec } \begin{cases} |H(f)| = \prod_{F_c} (f) \\ \varphi(f) = 0 \end{cases}$$

d'où $h(t) = 2 F_c \operatorname{sinc}(2\pi F_c t)$.



-De même pour le filtre passe-bande :



Ce type de filtre n'est pas physiquement réalisable. La réponse impulsionnelle n'est pas causale. En supposant que cette réponse est limitée par une fenêtre $w(t)$, la nouvelle réponse, notée $h_1(t)$, s'écrit :

$$h_1(t) = h(t) w(t)$$

La réponse fréquentielle $H_1(f)$ correspondante est :

$$H_1(f) = H(f) * W(f)$$

Exemple :

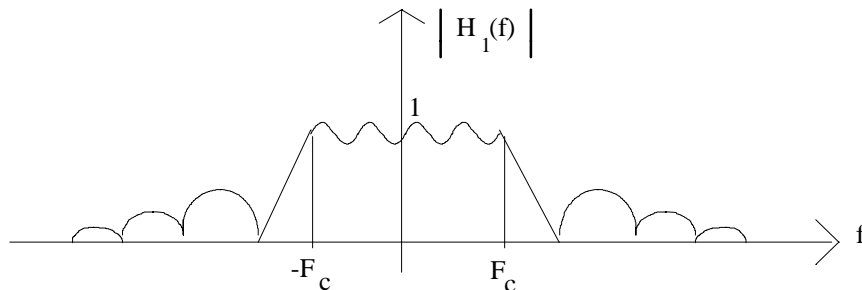
Si $w(t) = \prod_{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{T}{2} \right)$ alors :

$$H_1(f) = H(f) * T \operatorname{sinc}(\pi f T) e^{-\pi j f T}$$

Ainsi, dans le cas d'un filtre passe-bas on trouve :

$$H_1(f) = \int_{-F_c}^{F_c} T \operatorname{sinc}(\pi(f-u)T) e^{-\pi j(f-u)T} du$$

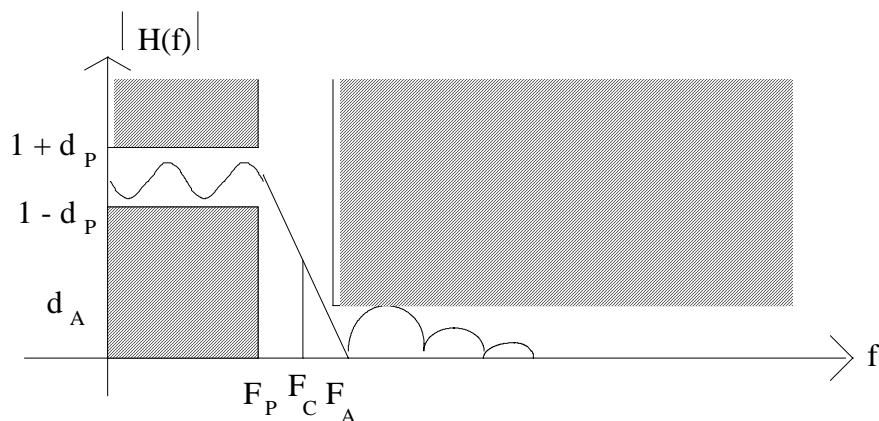
$\varphi_1(f)$ est différent de zéro et $H_1(f)$ est représentée par :



Ces ondulations sont connues sous le nom de phénomène de GIBBS.

Gabarit

On approche donc la réponse fréquentielle idéale un gabarit. Pour un filtre passe-bas, le gabarit est défini par :

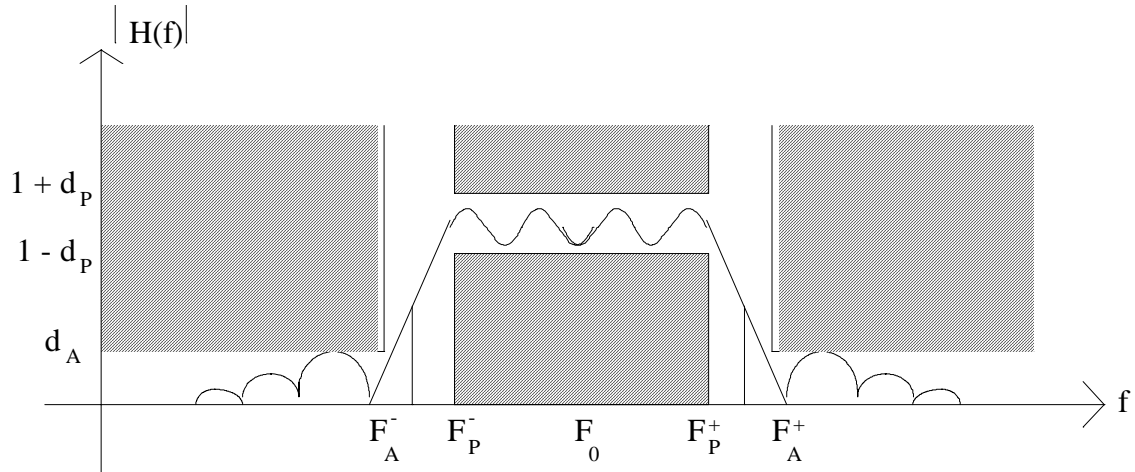


La fréquence de coupure F_c est obtenue pour une atténuation de 3dB. La bande $[0, F_c]$ est appelé *bande passante*, $[F_p, F_A]$ est la *bande de transition*. et $[F_A, +\infty]$ la *bande atténuée*. Les valeurs d_p et d_A sont, respectivement les taux d'ondulations dans la bande

passante et dans la bande atténuée. On mesure la raideur (ou sélectivité) du filtre R par :

$$R = \frac{F_P}{F_A}$$

De même, pour le filtre passe-bande, le gabarit est :



On définit la fréquence centrale F_0 , la raideur R et la largeur de bande relative B par :

$$F_0 = \sqrt{F_P^+ F_P^-} \quad ; \quad R = \frac{F_P^+ - F_P^-}{F_A^+ - F_A^-} \quad ; \quad B = \frac{F_P^+ - F_P^-}{F_0}$$

Si B est inférieur à 0,1 le filtre est dit à la bande étroite. Si B est supérieur à 0,5, le filtre est à bande large.

Le gabarit du filtre passe-haut (Resp. coupe-bande) est défini de façon analogue au passe-bas (Resp. passe-bande). Le rôle des bande atténuée et passante est inversé.

Normalisation

Un filtre passe-bas, de fonction de transfert $H(p)$ est normalisé si sa pulsation de coupure est de 1 rd/s et si $|H(0)| = 1$. On décrit ces filtres, de façon générale, par :

$$H(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} \quad \text{avec} \quad a_0 = 1 \quad \text{car} \quad |H(p=0)| = 1 .$$

Plusieurs auteurs ont proposé un jeu de coefficients a_i . On citera, par exemple, BUTTEWORTH qui a calculé les coefficients a_i de façon à ce que les n premières dérivées de $H(f)$ soient nulles pour $f = 0$ et :

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}} \quad \text{ou encore} \quad |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Les coefficients des filtres de BUTTEWORTH normalisés sont :

n	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆
2	1	$\sqrt{2}$	1				
3	1	2	2	1			
4	1	2,6131	3,4142	2,6131	1		
5	1	3,2361	5,2361	5,2361	3,2361	1	
6	1	3,8637	7,4641	9,1416	7,4641	3,8637	1

De même BERNSTEIN a proposé des coefficients en utilisant les polynômes de LEGENDRE.

n	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆
2	1	$\sqrt{2}$	1				
3	1	2,3537	2,2700	1,7319			
4	1	3,0411	4,6253	3,8280	2,4493		
5	1	4,017	7,5689	9,8529	6,9369	4,4710	
6	1	4,8056	11,549	17,206	19,018	12,204	7,0702

Pour réaliser des filtres passe-bande, passe-haut ou coupe-bande, il suffit d'effectuer une transformation du filtre passe-bas normalisé. Cette transformation porte sur la variable de Laplace p .

$$p \rightarrow \frac{p}{2\pi F_C} : \text{Filtre passe-bas de fréquence de coupure } F_C$$

$$p \rightarrow \frac{2\pi F_C}{p} : \text{Filtre passe-haut de fréquence de coupure } F_C$$

$$p \rightarrow \frac{1}{B} \left(\frac{p}{2\pi F_0} + \frac{2\pi F_0}{p} \right) : \text{Filtre passe-bande de fréquence centrale } F_0 \text{ et de largeur de bande relative } B$$

$$p \rightarrow \frac{B}{\frac{p}{2\pi F_0} + \frac{2\pi F_0}{p}} : \text{Filtre coupe-bande de fréquence centrale } F_0 \text{ et de largeur de bande relative } B$$

Exemple: Transformation du filtre passe-bas du 1^{er} ordre en un filtre passe haut de fréquence de coupure F_C :

$$H(p) = \frac{1}{1+p} : \text{passe-bas normalisé 1^{er} ordre}$$

$$H_1(p) = H\left(\frac{2\pi F_C}{p}\right) = \frac{p}{p + 2\pi F_C} : \text{Passe-haut de fréquence de coupure } F_C.$$

2°) Synthèse de filtre par transformation de p en Z.

Le passage de la fonction de transfert $H(p)$ à $H(Z)$ s'effectue, de façon théorique, en posant $p = Ln[Z]$, ce qui conduit à une fonction $H(Z)$ non-rationnelle et donc à un filtre difficilement réalisable.

Pour passer du filtre analogique au filtre numérique, il faut donc trouver une transformation $p=f(Z)$ qui permet d'écrire la fonction de transfert du filtre discret sous forme rationnelle, donc réalisable simplement. Ces relations sont établies par équivalence entre la fonction réalisée par le filtre analogique $H(p)$ et le filtre discret $H_1(Z)$.

Dans tous les cas, la relation entre p et Z n'est qu'une approximation de $Z = e^{pT_e}$, qui conduit à une déformation de la réponse fréquentielle. C'est à dire :

$$H(p = 2\pi jf) \neq H_1(Z = e^{2\pi jfT})$$

où $H_1(Z)$ est le filtre obtenu pour $H(p=f(Z))$.

a°) Equivalence de la dérivation

L'action dérivée, en continu, est caractérisée par la fonction de transfert $H_D(p)$:

$$H_D(p) = p.$$

En discret la dérivée $y(k)$ du signal $x(k)$ peut s'approcher par :

$$(1) \quad y(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_e}$$

d'où :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1 - Z^{-1}}{T_e}$$

Si l'on pose $H_D(p) = H(Z)$ alors :

$$p = \frac{1 - Z^{-1}}{T_e}$$

Remarque : C'est une approximation, au 1^{er} ordre de $Z = e^{pT_e}$:

$$Z^{-1} = e^{-pT_e} \approx 1 - pT_e \text{ d'où } p = \frac{1 - Z^{-1}}{T_e}$$

Exemple: Déterminer la relation de récurrence du filtre numérique $H_1(Z)$ correspondant au filtre analogique $H(p)$:

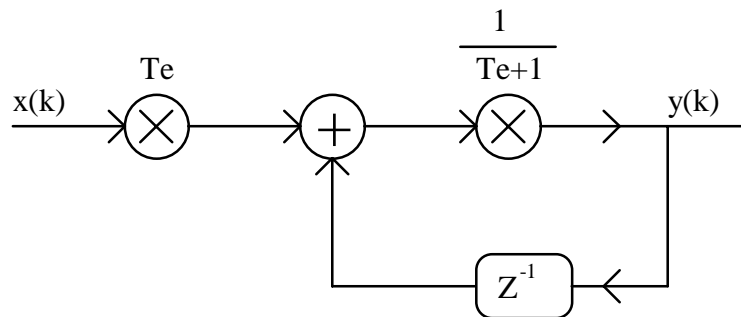
$$H(p) = \frac{1}{1 + p} \quad (\text{passe-bas normalisé})$$

$$H_1(Z) = H\left(p = \frac{1 - Z^{-1}}{T_e}\right) = \frac{T_e}{T_e + 1 - Z^{-1}}$$

d'où :

$$y(k) = \frac{1}{T_e + 1} [T_e x(k) + y(k - 1)]$$

La réalisation est :



Remarque : Il existe d'autres approches de la dérivation en discret. Mais la relation (1) est la plus couramment utilisée.

b°) Transformation bilinéaire (Equivalence de l'intégration)

C'est une transformation très fréquente dans la réalisation de filtres numériques. Elle consiste à approcher l'intégration idéal, $H_I(p) = \frac{1}{p}$, par la relation de récurrence, en discret :

$$y(k) = y(k - 1) + \frac{T_e}{2} [x(k) + x(k - 1)]$$

où, $\frac{T_e}{2} [x(k) + x(k-1)]$ représente l'aire entre $x(k)$ et $x(k-1)$, calculée par la méthode des trapèze. $H_1(Z)$ s'écrit :

$$H_1(Z) = \frac{T_e}{2} \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}$$

La relation entre p et Z est donc :

$$\frac{1}{p} = \frac{T_e}{2} \frac{1 + Z^{-1}}{1 - Z^{-1}}$$

d'où :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

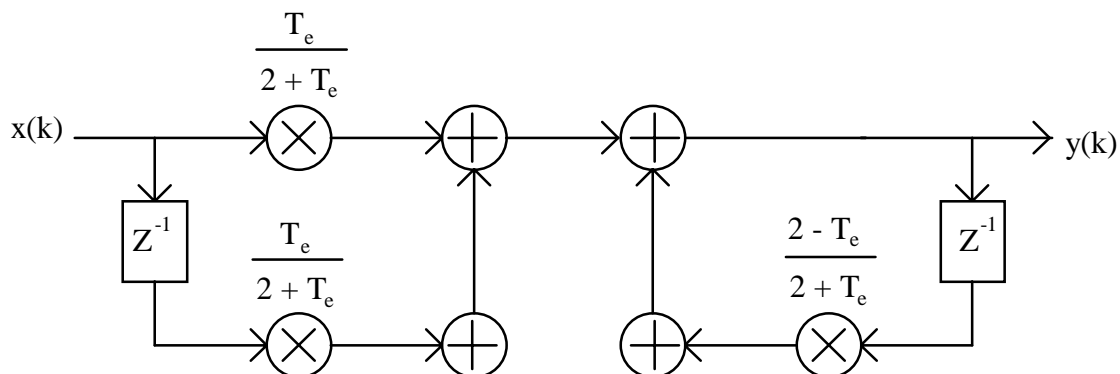
Cette transformation est appelée *transformation bilinéaire*.

Exemple :

$$\text{Si } H(p) = \frac{1}{1+p} \text{ alors } H_1(Z) = H\left(p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}\right) = \frac{T_e(1 + Z^{-1})}{T_e + 2 + (T_e - 2)Z^{-1}}$$

L'équation de récurrence est :

$$y(k) = \frac{1}{T_e + 2} [T_e x(k) + T_e x(k-1) + (2 - T_e)y(k-1)]$$



Remarque : On peut établir d'autres expressions de " l'intégration discrète ", donc d'autres transformation de p en Z . Par exemple, l'approximation de Simpson :

$$y(k) = y(k-2) + \frac{T_e}{3} [x(k) + 4x(k-1) + x(k-2)] \quad \text{d'où} \quad p = \frac{3}{T_e} \frac{1 - Z^{-2}}{1 + 4Z^{-1} + Z^{-2}}$$

c°) Transformation homographique

La transformation homographique s'écrit :

$$p = K \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = K \frac{Z - 1}{Z + 1}$$

La transformation bilinéaire est un cas particulier de transformation homographique. K est le facteur d'adaptation en fréquence. Etudions d'abord le cas où $K = 1$, c'est à dire si :

$$p = \frac{Z - 1}{Z + 1} \Leftrightarrow Z = \frac{1 + p}{1 - p}$$

La stabilité du filtre numérique est assurée si le filtre analogique est stable. En effet, si le pôle p_0 est à partie réelle négative, Z_0 s'écrit :

$$Z_0 = \frac{1 + p_0}{1 - p_0} = \frac{1 + \sigma_0 + 2\pi j f_0}{1 - \sigma_0 - 2\pi j f_0}$$

d'où :

$$|Z_0|^2 = \frac{(1 + \sigma_0)^2 + (2\pi f_0)^2}{(1 - \sigma_0)^2 + (2\pi f_0)^2} < 1 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 < 0 .$$

Le filtre est donc stable. Cependant, les réponses fréquentielles du filtre analogique $H(p=2\pi j f)$ et du filtre discret $H_1(Z = e^{2\pi j f T})$ sont différentes. En effet, ce type de transformation introduit une distorsion en fréquence. Appelons f_A une fréquence dans le domaine continu et f_D une fréquence dans le domaine discret. *En théorie*, $Z = e^{2\pi j f_D T_c} = e^{p T_c} = e^{2\pi j f_A T_c}$ d'où $f_A = f_D$. *En pratique*, si l'on utilise la transformation homographique, on trouve :

$$p = \frac{Z - 1}{Z + 1} \Leftrightarrow 2\pi j f_A = \frac{e^{2\pi j f_D T_c} - 1}{e^{2\pi j f_D T_c} + 1}$$

soit encore :

$$2\pi j f_A = \frac{e^{j\pi f_D T_c}}{e^{j\pi f_D T_c}} \frac{e^{j\pi f_D T_c} - e^{-j\pi f_D T_c}}{e^{j\pi f_D T_c} + e^{-j\pi f_D T_c}}$$

ou :

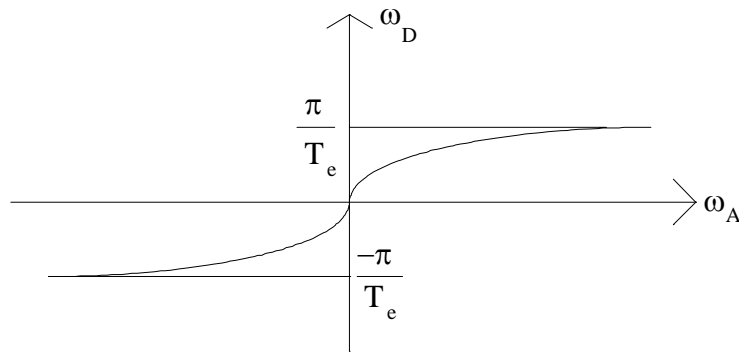
$$2\pi j f_A = j \operatorname{tg}(\pi f_D T_c)$$

La relation qui lie f_A et f_D est donc :

$$\boxed{\begin{aligned} 2\pi f_A &= \operatorname{tg}(\pi f_D T_c) \\ \omega_A &= \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_D T_c}{2}\right) \end{aligned}}$$

d'où :

$$\boxed{\omega_D = \frac{2}{T_c} \operatorname{Arctg}(\omega_A)}$$



Cette relation montre que lorsque ω_A varie de 0 à $+\infty$, ω_D varie de 0 à π/T_e . La fréquence f_D varie donc de 0 à $\frac{F_e}{2}$. Cette transformation à l'avantage d'éviter le problème de recouvrement spectral, lié à l'échantillonnage. Si l'on veut que les réponses fréquentielles des filtres analogique et discret soient égales pour les pulsation $\omega_A = \omega_{A0}$ et $\omega_D = \omega_{D0}$, il faut introduire un facteur d'adaptation K tel que :

$$K = \frac{\omega_{A0}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{D0} T_e}{2}\right)}$$

$$p = \frac{\omega_{A0}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{D0} T_e}{2}\right)} \frac{Z - 1}{Z + 1}$$

On est ainsi assuré que les réponses fréquentielles $H(p = 2\pi jf)$ et $H_1(Z = e^{2\pi jf T_e})$ vérifient la relation :

$$H(p = 2\pi jf_{A0}) = H_1(Z = e^{2\pi jf_{D0} T_e})$$

Exemple : Considérons le filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_C :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_C}}$$

On désire réaliser un filtre numérique passe-bas de fréquence de coupure identique ω_C . On a alors $\omega_{D0} = \omega_{A0} = \omega_C$, donc :

$$K = \frac{\omega_C}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_C T_e}{2}\right)}$$

et :

$$H_1(Z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T_e}{2}\right)} \frac{Z-1}{Z+1}}$$

On vérifie bien que :

$$H_1(Z = e^{j\omega_c T_e}) = \frac{1}{1 + j} = H(p = j\omega_c)$$

D'autre part l'équation de récurrence du filtre numérique est :

$$y(k) = \frac{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T_e}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T_e}{2}\right)} y(k-1) + \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T_e}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T_e}{2}\right)} [x(k) + x(k-1)]$$

3°) Synthèse de filtre par invariance temporelle.

Ce type de synthèse a pour but de faire correspondre les sorties des filtres analogique et numérique pour des entrées données. C'est à dire :

$$y_1(k) = y(t = kT_e)$$

où $y_1(k)$ est la sortie du filtre discret et $y(t)$ la sortie du filtre continu.

a°) Invariance impulsionnelle

On veut, dans ce cas, que les réponses impulsionnelles soient identiques. Il faut dans un premier temps calculer $h(t)$ par transformation de Laplace inverse ($h(t) = L^{-1}[H(p)]$). Puis en déduire $h(k)$ par $h(k) = h(t = kT_e)$. Enfin calculer $H(Z)$ à partir de $h(k)$:

$$H(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) Z^{-k} = TZ[h(k)]$$

Ces trois opérations sont écrites de façon simplifiée :

$$H(Z) = TZ[L^{-1}[H(p)]]$$

Exemple : Effectuer la synthèse du filtre passe-bas du 1^{er} ordre, de fréquence de coupure f_c , par une technique d'invariance impulsionnelle.

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + \frac{p}{2\pi f_c}}$$

d'où $h(t) = L^{-1}[H(p)] = \omega_c e^{-\omega_c t}$ et $h(k) = \omega_c e^{-\omega_c k T_e}$. On en déduit $H(Z)$:

$$H(Z) = \frac{\omega_c}{1 - e^{-\omega_c T_e} Z^{-1}}$$

Par suite :

$$y(k) = e^{-\omega_c T_e} y(k-1) + \omega_c x(k)$$

b°) Invariance indicielle

On désire que les réponses indicielles soient identiques. Soit $Y_{\text{ind}}(p)$ la transformée de Laplace de la réponse indicielle, c'est à dire :

$$Y_{\text{ind}}(p) = H(p) U(p)$$

où $U(p)$ est la transformée de Laplace de l'échelon $u(t)$:

$$U(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y_{\text{ind}}(p) = \frac{H(p)}{p}$$

$$\text{d'où } Y_{\text{ind}}(t) = L^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right]$$

De même en discret on a :

$$Y(Z) = H(Z) U(Z)$$

où $U(z)$ est la transformée en Z de l'échelon $u(k)$:

$$U(Z) = \frac{Z}{Z-1}$$

d'où :

$$Y(Z) = H(Z) U(Z) = TZ[y_{\text{ind}}(k)]$$

soit encore :

$$H(Z) = \frac{Z-1}{Z} TZ \left[L^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right] \right]$$

Exemple : Appliquons l'invariance indicielle au filtre du 1^{er} ordre $H(p)$:

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\omega_c + p}$$

d'où :

$$\frac{H(p)}{p} = \frac{\omega_c}{p(p + \omega_c)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_c}$$

$$y_{\text{ind}}(t) = L^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right] = (1 - e^{-\omega_c t}) u(t)$$

et :

$$Y(Z) = TZ[y_{\text{ind}}(k)] = TZ[(1 - e^{-\omega_c k T_e}) u(k)]$$

$$Y(Z) = \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z - e^{-\omega_c T_e}} \quad \text{si } |Z| > 1$$

donc :

$$H(Z) = \frac{Z-1}{Z} Y(Z) = 1 - \frac{Z-1}{Z - e^{-\omega_c T_e}} = \frac{1 - e^{-\omega_c T_e}}{Z - e^{-\omega_c T_e}}$$

$$H(Z) = (1 - e^{-\omega_c T_e}) \frac{Z^{-1}}{1 - e^{-\omega_c T_e} Z^{-1}}$$

On en déduit la réponse impulsionnelle et l'équation de récurrence

$$\begin{cases} h(k) = (1 - e^{-\omega_c T_e}) e^{-\omega_c (k-1) T_e} u(k-1) \\ y(k) = e^{-\omega_c T_e} y(k-1) + (1 - e^{-\omega_c T_e}) x(k-1) \end{cases}$$

c°) Invariance pour une entrée quelconque e(t)

On procède, pour une entrée quelconque $e(kT_e)$ de la même façon que précédemment. La sortie $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = L^{-1}[H(p) E(p)]$$

avec $E(p) = L[e(t)]$.

D'autre part :

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{E(Z)} = \frac{TZ[y(k)]}{E(Z)}$$

Par suite :

$$H(Z) = \frac{1}{E(Z)} TZ[L^{-1}[H(p) E(p)]]$$

4°) Synthèse de filtre par invariance fréquentielle.

La synthèse de filtre par invariance fréquentielle suppose la connaissance de la réponse fréquentielle $H(n)$ échantillonnée sur N points aux fréquences $\frac{nF_e}{N}$:

$$H(n) = \text{TFD}_N \{h(k)\}$$

où $h(k)$ est la réponse impulsionnelle limitée aux N premiers points . On a alors :

$$H(Z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) Z^{-k}$$

Soit :

$$H(Z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} H(n) W_N^{+nk} \right] Z^{-k}$$

$$H(Z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \left[\sum_{k=0}^{N-1} (W_N^{+n} Z^{-1})^k \right]$$

$$H(Z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \frac{1 - Z^{-N} W_N^{+nN}}{1 - W_N^{+n} Z^{-1}}$$

Soit enfin :

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-N}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \frac{1}{1 - W_N^{+n} Z^{-1}}$$

Remarque : $h(k)$ est réelle si $H(N-n) = H^*(n)$

Exemple: Un signal $x(t)$ est échantillonné sur 8 points, à une fréquence $F_e = 8\text{KHz}$. On désire filtrer $x(k)$ par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_c = 2,5\text{KHz}$. On en déduit :

$$N = 8 \text{ et } \Delta f = \frac{F_e}{N} = 1\text{KHz}$$

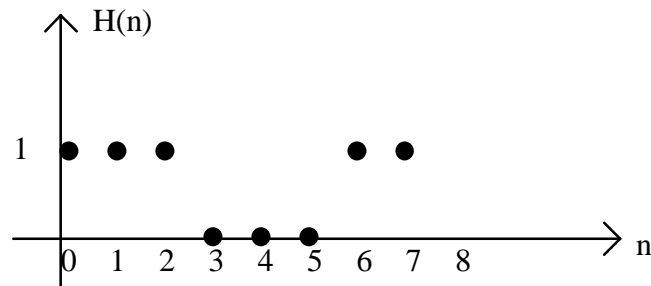
On doit donc avoir :

$$H(0) = 1 ; H(1) = 1 ; H(2) = 1 ; H(3) = 0 ; H(4) = 0$$

et par symétrie :

$$H(5) = H^*(8-5) = 0; H(6) = H^*(8-6) = 1 \\ H(7) = H^*(8-7) = 1$$

On peut représenter $H(n)$ par :



d'où

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-8}}{8} \sum_{n=0}^7 H(n) \frac{1}{1 - W_8^{+n} Z^{-1}}$$

$$H(Z) = \frac{1 - Z^{-8}}{8} \left[\frac{1}{1 - Z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^1 Z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^2 Z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^6 Z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^7 Z^{-1}} \right]$$

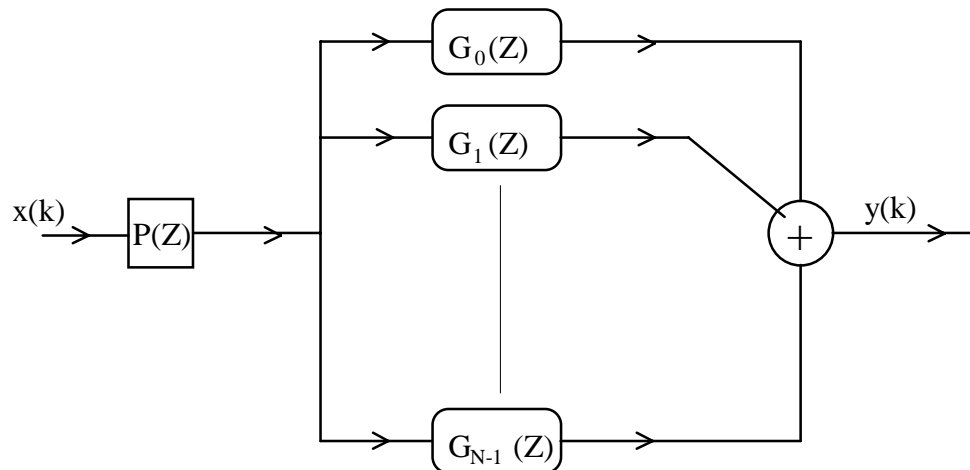
La réalisation de tels filtres s'effectue en posant :

$$H(Z) = P(Z) \sum_{n=0}^{N-1} G_n(Z)$$

avec :

$$P(z) = \text{Filtre en peigne} = \frac{1 - Z^{-N}}{N}$$

$$G_n(Z) = \frac{H(n)}{1 - W_N^{+n} Z^{-1}}$$



Filtrage par TFD

Il est possible de filtrer le signal d'entrée $x(k)$ dans le domaine fréquentiel, en calculant sa TFD. On a alors :

$$X(n) = \text{TFD}\{x(k)\}$$

Le signal $y(k)$ est obtenu par TFD Inverse :

$$Y(k) = \text{TFD}^{-1}\{Y(n)\} = \text{TFD}^{-1}\{H(n) X(n)\}$$

Application : Loupe spectrale fréquentielle.

Effectuer une loupe spectrale, sur une bande de fréquence $B = f_1 - f_0$ consiste à augmenter la résolution Δf , sur la bande B , en éliminant les fréquences extérieurs à la bande .

Soit $x(k)$ un signal de fréquence de coupure F_c , échantillonné à une fréquence F_e et de durée importante. On dispose d'un transformateur de Fourier qui effectue une TFD sur N points au maximum. La résolution est donc :

$$\Delta f = \frac{F_c}{N}$$

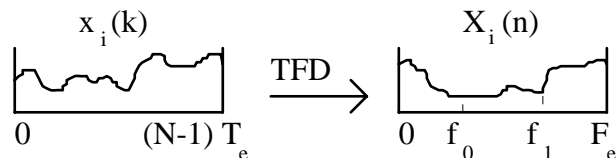
or, on désire avoir une résolution Δf_B sur la bande B :

$$\Delta f_B = \frac{B}{N} = \frac{f_1 - f_0}{N}$$

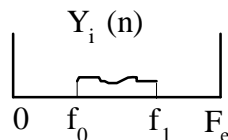
Comment faire?. Il faut dans un premier temps découper le signal $x(k)$ en blocs de N points $x_i(k)$:



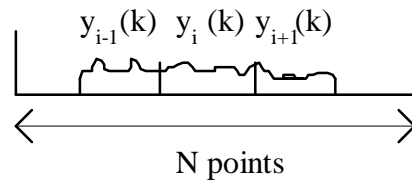
On effectue ensuite sur chaque bloc $x_i(k)$ une TFD :



Puis on multiplie $X_i(n)$ par $H(n)$, qui dans ce cas, est une porte comprise entre f_0 et f_1 . On obtient le spectre $Y_i(n)$, qui est non-nul sur C points ($C \ll N$).



On effectue ensuite une TFD inverse sur C points. On obtient le signal $y_i(k)$ sur C points. On réitère le traitement sur le bloc $x_{i+1}(k)$ qui restitue le signal $y_{i+1}(k)$. Puis on juxtapose les signaux $y_i(k)$ et $y_{i+1}(k)$. On procède ainsi jusqu'à obtenir N points.



On a alors un bloc de N points filtré sur $[f_0, f_1]$. Si on effectue une TFD sur N points, la résolution est $\Delta f_B = \frac{f_1 - f_0}{N}$.

5°) Bruit de traitement.

De l'échantillonnage du signal à sa sortie du filtre numérique, la majeure partie des étapes du traitement est entachée d'un bruit. Le premier de ces bruits est lié à la Conversion Analogique-Numérique (CAN) du signal.

Bruit de conversion

La conversion A/N s'effectue en codant la valeur $x_0(t)$ sur un nombre M d'unités d'information binaire (Binary Digit : BIT). Chaque bit peut prendre la valeur 0 ou 1. Le nombre de niveau de codage est donc de 2^M . En général, la tension d'entrée des convertisseurs est limitée à une plage $[V_0, V_1]$. Le pas de quantification q_0 est :

$$q_0 = \frac{V_1 - V_0}{2^M}$$

Exemple:

① Si $V_0=0$, $V_1=5V$ et $M=8$ alors $2^M = 256$ et $q_0 = \frac{5}{256} = 19,5 \text{ mV}$.

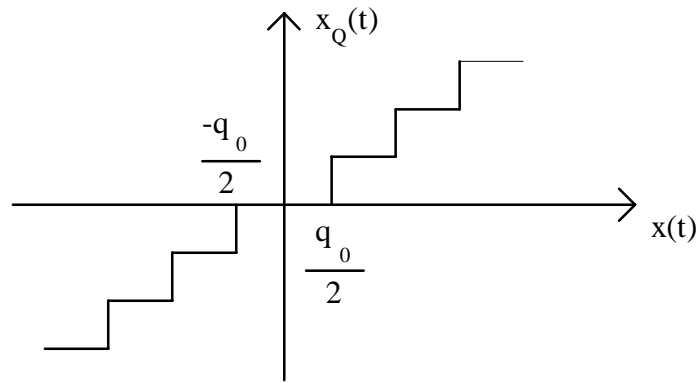
Les valeurs prises par les 8 bits vont de 0 à 255. Il n'y a pas de bit de signe

② Si $V_0=-5V$, $V_1=5V$ et $M = 8$ alors $q_0 = \frac{10}{256} = 39 \text{ mV}$.

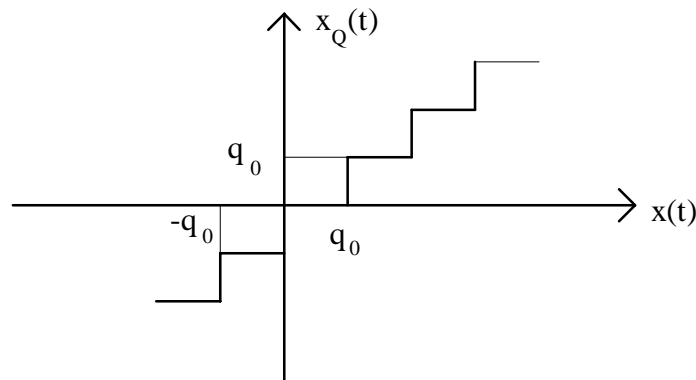
Dans ce cas, la valeur prise par les 8 bits va de -128 à + 128. Le bit de poids le plus fort joue le rôle du signe (1=-, 0=+)

La conversion A/N peut s'effectuer soit par arrondi de la valeur $x(t)$, soit par troncature de cette valeur.

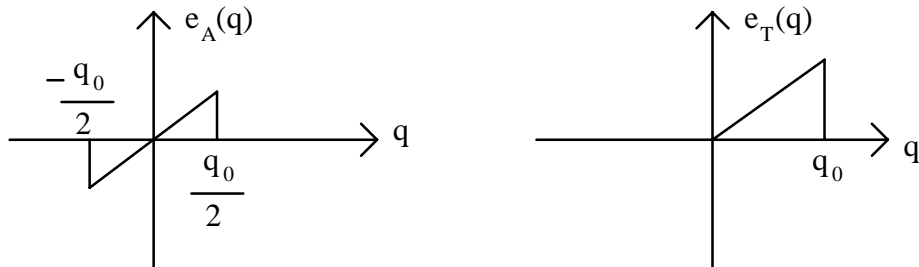
Arrondi : $x_Q(t) = q_0 K$ avec K entier si $q_0 K - \frac{q_0}{2} \leq x(t) < q_0 K + \frac{q_0}{2}$



Troncature : $x_Q(t) = q_0 K$ avec K entier si $q_0 K \leq x(t) < (q_0 + 1) K$.



L'erreur d'arrondi $e_A(q)$ est comprise entre $-\frac{q_0}{2}$ et $\frac{q_0}{2}$, alors que l'erreur de troncature $e_T(q)$ est comprise entre 0 et q



L'erreur moyenne m_A ou m_Q commise est donnée par :

$$m_A = \frac{1}{q_0} \int_{-\frac{q_0}{2}}^{\frac{q_0}{2}} e_A(q) dq = \frac{1}{q_0} \int_{-\frac{q_0}{2}}^{\frac{q_0}{2}} q dq = \frac{1}{q_0} \left[\frac{q^2}{2} \right]_{-\frac{q_0}{2}}^{\frac{q_0}{2}} = 0$$

$$m_Q = \frac{1}{q_0} \int_0^{q_0} e_T(q) dq = \frac{1}{q_0} \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^{q_0} = \frac{q_0}{2}$$

La troncature est donc plus pénalisante dans la poursuite du traitement. De plus la puissance de l'erreur de quantification est :

$$P_A = \frac{1}{q_0} \int_{-\frac{q_0}{2}}^{\frac{q_0}{2}} e_A^2(q) dq = \frac{1}{q_0} \left[\frac{q^3}{3} \right]_{-\frac{q_0}{2}}^{\frac{q_0}{2}} = \frac{q_0^2}{12}$$

$$P_T = \frac{1}{q_0} \int_0^{q_0} e_T^2(q) dq = \frac{1}{q_0} \left[\frac{q^3}{3} \right]_0^{q_0} = \frac{q_0^2}{3}$$

Dynamique du codage

Soit $[-V_0, +V_0]$ la plage des amplitudes à coder, le pas de quantification est, pour M bits :

$$q = \frac{2V_0}{2^M}$$

soit :

$$V_0 = q 2^{M-1}$$

On appelle puissance de crête du codeur, P_c , la puissance du signal sinusoïdal d'amplitude maximale admise sans écrêtage, V_0 :

$$P_c = \frac{V_0^2}{2} = 2^{2M-3} q^2$$

La dynamique de codage est donnée par le rapport entre la puissance de crête du codeur, P_c , et la puissance de l'erreur de quantification P_A ou P_T :

$$\frac{P_c}{P_A} = 2^{2M-3} \cdot 12 = \frac{3}{2} 2^{2M} ; \quad \frac{P_c}{P_T} = 3 \cdot 2^{2M-3}$$

Exprimées en dB, on a :

$$\left(\frac{P_c}{P_A} \right)_{\text{dB}} = 10 \text{Log}_{10} \left(\frac{P_c}{P_A} \right) = (6M + 1,7) \text{ dB}$$

$$\left(\frac{P_c}{P_T} \right)_{\text{dB}} = 10 \text{Log}_{10} \left(\frac{P_c}{P_T} \right) = (6M - 4,3) \text{ dB}$$

Si, par exemple, on désire une dynamique supérieur à 96dB il faut utiliser un codeur travaillant en arrondi sur 16 bits.

Bruit de calcul

Le bruit de calcul, lié aux additions et multiplications du traitement, s'ajoute au bruit de quantification. Soit $h(k)$ la

réponse impulsionnelle du filtre. La puissance du bruit de sortie P_s est :

$$P_s = P_Q P_f$$

OU P_Q EST LA PUISSANCE DE L'ERREUR DE QUANTIFICATION (P_A OU P_T) ET

$P_f = \int_{-\frac{F_c}{2}}^{+\frac{F_c}{2}} |H(f)|^2 df$. ON EN DEDUIT, D'APRES LA RELATION DE PARSEVAL:

$$P_s = P_Q \int_{-\frac{F_c}{2}}^{+\frac{F_c}{2}} |H(f)|^2 df = P_Q \sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)|^2$$

Soit encore

$$\begin{cases} P_{SA} = P_A P_f = \frac{q^2}{12} \sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)|^2 \\ P_{ST} = P_T P_f = \frac{q^2}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} |h(k)|^2 \end{cases}$$