Les surfaces caustiques par la géométrie - Application aux capteurs catadioptriques

-

Geometric approach of the caustic surfaces - an application to catadioptric sensors

Siohoï Ieng

LISIF-PARC

Université Pierre et Marie Curie

3 rue Galilée, 94200 Ivry-sur-Seine.

LACSC ECE

53 rue de Grenelle, 75007 Paris.

ieng@lis.jussieu.fr - ieng@ece.fr

Ryad Benosman

LISIF-PARC

Université Pierre et Marie Curie

3 rue Galilée, 94200 Ivry-sur-Seine.

benosman@ccr.jussieu.fr

Résumé : *La vision omnidirectionnelle utilise des systèmes optiques pour lesquels la notion de caustique est souvent occultée par souci de simplification, afin de respecter une reconstruction perspective correcte. La surface caustique est ramenée à un cas de dégénérescence, appelé la contrainte du point focal unique. Une telle hypothèse implique un placement précis des composants la rendant difficile à satisfaire. De plus, afin d'exploiter des propriétés plus générales de résolutions, il est nécessaire d'examiner la surface caustique.*

Une étude de la caustique par réflexion (dite catacaustique) est abordée ici dans la mesure où les capteurs utilisés sont principalement à base de surfaces réfléchissantes. Les travaux existants sont malheureusement spécifiques à une famille de surfaces et nécessitent un prétraitement lourd en calcul. Nous proposons ici une méthode souple de construction géométrique de la caustique adaptée aux surfaces 3D, basée sur une méthode développée à l'origine pour les courbes planes 2D.

Mots-clés : Vision omnidirectionelle, capteur catadioptrique, calibrage, caustique (par réflexion)

Abstract : *Omnidirectional vision makes use of optical systems that usually simplify the notion of caustic in order to preserve perpectively correct views. Caustic surfaces are in these cases degenerated and reduced to a single point. Such a property is called single view point constraint.*

Hence, most of the catadioptric cameras rely on the single viewpoint constraint that is hardly fullfilled since it requires highly precised components placement. There exists many works on non single viewpoint catadioptric sensors fullfilling specific resolutions. In such configurations, the computation of the caustic curve becomes essential. Existing solutions are unfortunately too specific to a class of curves and need heavy computation load. This paper presents a flexible geometric construction of the caustic curve of a 3D surface. This construction is an extension of a geometric construction designed for 2D plane curves. Tests and experimental results illustrate the possibilities of this approach.

Keywords : Omnidirectional vision, catadioptric sensor, calibration, caustic (by reflection)

1 Introduction

Les courbes caustiques sont des phénomènes physiques étudiés par Huygens et Hamilton [Hamilton, 1828]. Ce sont les enveloppes de rayons réfléchis ou réfractés par un dioptre. La plupart des systèmes optiques sont conçus dans un souci de convergence des rayons en un point focal unique, réduisant la courbe caustique à un point. Les capteurs catadioptriques satisfaisant cette propriété de convergence (dénommée par la suite SVC pour Single Viewpoint Constraint), fournissent des systèmes géométriques plus simples à modéliser et permettent une reconstruction perspective correcte des vues [Rees, 1970, K. Yamazawa, 1993, Nalwa, 1996, Nayar, 1997, Peri and Nayar, 1997, Baker and Nayar, 1998, J. Gluckman, 1999]. En contrepartie, une grande précision est requise dans l'agencement de ces systèmes. Cette exigence est cependant difficile à satisfaire en pratique [Fabrizio et al., 2002]. Par ailleurs, la SVC limite fortement les propriétés de résolution que de nombreux travaux cherchent à maîtriser par différentes approches et dont le but est de développer des capteurs possédant des propriétés spécifiques de résolution[J.S. Chahl, 1997, Backstein and Pajdla, 2001, Conroy and Moore, 1999, Gaetcher and Pajdla, 2001, Hicks and Bajcsy, 2000, Hicks et al., 2001, M. Ollis, 1999]. Ces solutions reposent généralement sur la résolution numérique d'équations différentielles à partir d'un échantillonnage de la surface réflectrice. L'étude de la caustique s'avère donc intéressante dans le cas d'un capteur qui ne vérifie pas la SVC, soit par défaut de précision (montage, calcul), soit par construction dans le but d'exploiter des propriétés optiques plus étendues.

Il existe plusieurs méthodes de calcul de la caustique d'une surface continue. Elles sont souvent trop spécifiques à une famille de courbes et/ou à une configuration particulière de la source lumineuse [Bellver-Cebreros et al., 1994]. Des approches plus complexes, basées sur le calcul de l'illumination sont utilisées en optique géométrique [Burkhard and Shealy, 1973] : c'est le modèle du "flot de flux". Elles sont principalement appliquées en infographie, pour des rendus de scènes réalistes [Mitchell and Hanrahan, 1992]. Une méthode de détermination du lieu de la caustique, basée sur le modèle de "flot de flux" a été présentée dans [Swaminathan et al., 2001]. Ce travail s'est restreint à une famille très réduite de surfaces (hyperboloïdes, ellipsoïdes et paraboloïdes). Il repose sur la connaissance obligatoire de l'équation du miroir. Les calculs mis en œuvre sont extrêmement lourds et peuvent ne pas aboutir. De même, cette méthode ne prend pas en compte les miroirs calculés par résolutions numériques d'équations différentielles et les

miroirs qui ne sont définis que par des nuages de points. Ces miroirs ont l'avantage de produire des champs de vision complexes, bien utiles dans de nombreuses applications. Nous proposons dans cet article une approche générale, bien plus simple, s'appliquant dans tous les cas de figure. Cette approche est dérivée du concept décrit dans [Bruce et al., 1981]. Elle utilise une construction géométrique de la caustique . Cette approche est très intéressante car elle est relativement peu exigeante en temps de calcul, elle n'est restreinte à aucun type de surface et est très flexible face aux miroirs dont l'expression analytique est inconnue. Nous généraliserons aussi cette méthode développée à l'origine pour des courbes à deux dimensions, aux surfaces à trois dimensions en ramenant le problème au cas 2D via le plan d'incidence. Ce découpage fournit une extension simple aux surfaces 3D. Une fois les plans incidents construits, il suffit de calculer la caustique d'une courbe plane qui est la trace de notre surface miroir dans ces plans d'incidence. Un changement de repère permet alors de replacer les points de la caustique dans le repère 3D de référence.

L'article est organisé comme suit. La première partie donne une brève présentation de la méthode analytique basée sur le "flot de flux". Nous soulèverons les difficultés de mise en œuvre de cette approche. Nous présenterons dans un second temps une autre méthode de calcul de la courbe caustique par construction géométrique. Nous montrerons que cette approche a l'avantage d'être très simple à mettre en œuvre et est applicable aux courbes a priori quelconques. Nous poserons la continuité comme unique prérequis. Nous étendrons par la suite le principe au cas 3D pour le calcul de la surface caustique. Nous illustrerons nos propos sur un capteur catadioptrique qui ne repose pas sur un point focal unique. Finalement de nombreux résultats expérimentaux viendront valider l'approche présentée.

2 Courbe caustique : définition et construction

Les capteurs catadioptriques pour lesquels la contrainte de point focal unique n'est pas vérifiée, nécessitent une connaissance de la caustique si leur calibrage est envisagé. En étant l'enveloppe des rayons réfléchis, la caustique permet de retrouver la direction de tout rayon incident à la surface et capté par la caméra.

Dans cette section, nous exposons deux méthodes de construction appliquées à de tels capteurs. La pre-

mière dérive de calculs détaillés dans [Burkhard and Shealy, 1973] pour des surfaces lisses. Le calcul est repris dans le cas particulier des surfaces coniques dans [Swaminathan et al., 2001], une analyse détaillée y est pratiquée.

La deuxième méthode que nous proposons, fait appel uniquement aux propriétés géométriques de la surface miroir. La caustique est obtenue point par point, en approximant localement le miroir par une conique dont les foyers sont la source lumineuse et le point caustique recherché.

2.1 Modèle du "flot de flux"

Ce modèle appliqué en optique fournit une modélisation complexe aux problèmes de réflexions lumineuses des surfaces. Ce paragraphe présente la méthode analytique utilisée dans [Swaminathan et al., 2001], d'après le modèle de [Burkhard and Shealy, 1973]. Elle a été appliquée aux coniques de révolution. L'équation exacte de la surface caustique s'obtient au prix d'une résolution d'équations différentielles. Malheureusement, dans le cas général d'une surface quelconque, il n'y a aucune certitude quant à l'existence d'une solution.

Nous fixons quelques notations pour formaliser le problème en posant $\mathbf{N}$, $\mathbf{V}_i$ et $\mathbf{V}_r$ comme étant respectivement les vecteurs normal, incident et réfléchi, de norme unitaire, au point courant $\mathbf{P}$ de la surface miroir M (voir la Fig. 1). Ces vecteurs, dépendent du point $\mathbf{P}$, ils sont également fonctions de t si M est paramétré par t. Le point $\mathbf{F}$ désignera par la suite le point caustique correspondant à $\mathbf{P}$ et à la source $\mathbf{S}$.

Selon les lois de la réflexion, nous avons la relation suivante :

$$\mathbf{V_r} - \mathbf{V_i} = 2(\mathbf{V_r}.\mathbf{N})\mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{V_i} = \mathbf{V_r} - 2(\mathbf{V_r}.\mathbf{N})\mathbf{N}$$

$\mathbf{P}$ et $\mathbf{F}$ vérifient alors l'égalité suivante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + q\mathbf{V}_r$$

où q est un scalaire.

La dépendance de $\mathbf{F}$ en t découle de celle de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{V}_r$ et celle en q provient directement de l'égalité précédente. $\mathbf{F}$ est donc une fonction de (t, q).

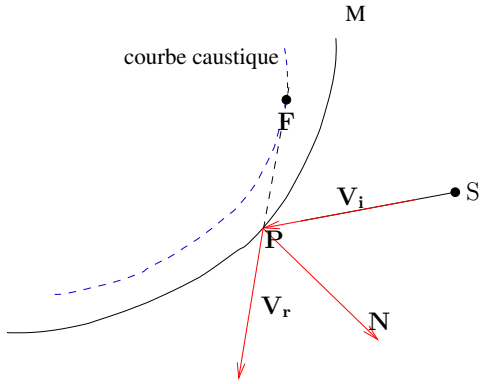

FIG. 1 – **La caustique par réflexion est le lieu de tangence des rayons réfléchis, représenté ici par le tracé en pointillés. Elle est fonction de la source lumineuse S. La direction de la réflexion est donnée par FP où F est le point caustique de M en P, relativement à S. Les directions d'incidence et de la normale sont $\mathbf{V_i}$ et N.**

Si l'équation paramétrique de M est de la forme :

$$M : \begin{cases} z(t) \\ \gamma(t) \end{cases}$$

alors, la jacobienne de **F** est égale à :

$$J(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial t} & \frac{\partial F_z}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial F_\gamma}{\partial t} & \frac{\partial F_\gamma}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{P}_z + q\dot{V}_{rz} & V_{rz} \\ \dot{P}_\gamma + q\dot{V}_{r\gamma} & V_{r\gamma} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Il est montré dans [Burkhard and Shealy, 1973] que si **F** est un point de la caustique, alors $J(\mathbf{F}) = 0$ et on obtient l'égalité équivalente sur q :

$$q = \frac{\dot{P}_z V_{r\gamma} - \dot{P}_\gamma V_{rz}}{V_{rz}\dot{V}_{r\gamma} - V_{i\gamma}\dot{V}_{rz}} \tag{2}$$

Nous constatons que q est fonction de t. Nous pouvons donc obtenir une écriture paramétrée uniquement par t de la caustique.

Dans le cas des courbes M coniques, ce paramétrage se met sous la forme générale :

$$M : \begin{cases} z(t) = t \\ \gamma(t) = \sqrt{C - Bt - At^2} \end{cases}$$

où A,B et C sont des constantes et l'équation implicite de M s'en déduit :

$$f(z, \gamma) = Az^2 + \gamma^2 + Bz - C = 0$$

Le lecteur se reportera à [Swaminathan et al., 2001] pour les solutions explicites et les détails de calcul. La même démarche est généralisée aux surfaces 3D. M est supposée lisse, sa courbe caustique associée à la source de lumière est déterminée en annulant un déterminant 3x3.

- **Remarque 1 :** l'équation paramétrique de M est connue.

  Si le profil de M est connu, des calculs complexes sont à prévoir pour la détermination de la jacobienne et pour la résolution de q en annulant $J(\mathbf{F})$. La résolution analytique de q fournit une solution exacte de la caustique, cependant rien ne garantit la faisabilité de la résolution (autrement que par approximation numérique).
- **Remarque 2 :** on ne dispose pas d'équation de M.

  C'est le cas le plus général. M est donnée sous la forme d'un nuage de points. Le calcul de q est donc numérique et peut se révéler ardu, en particulier lorsque le problème est généralisé aux surfaces 3D, dans ce cas q est racine d'une équation quadratique.

2.2 Construction géométrique

Dans cette section, nous proposons l'utilisation d'une autre méthode de calcul de la caustique permettant de contourner les difficultés précédemment mentionnées. Seules les propriétés locales de M sont exploitées pour une construction point par point de la courbe. La caustique de M étant une fonction de la source $\mathbf{S}$, l'idée de base est d'introduire une conique ayant un de ses foyers en $\mathbf{S}$. Une considération physique montre que tout rayon issu de $\mathbf{S}$ et réfléchi par M doit converger au deuxième foyer que nous noterons $\mathbf{F}$.

La description de cette construction sera présentée pour une courbe plane, puis elle sera étendue au cas 3D. Le lecteur pourra se reporter à [Bruce et al., 1981] pour les détails ainsi que pour les démonstrations de la méthode décrite dans ce qui suit.

2.2.1 Cas général

A tout point **P** de M, il existe une unique conique munie de propriétés pré-mentionnées, de sorte que **F** soit un point de la caustique de M, relativement à **S**, en **P**. Pour construire **F**, nous devons donc déterminer cette conique. Cette notion sera détaillée plus loin, le lecteur peut se référer à la Fig. 3 pour une illustration immédiate.

DÉFINITION 1 : *Étant donnée une courbe lisse M, une source* **S** *et un point* $\mathbf{P} \in M$*, nous construisons* **Q***, le symétrique de* **S***, par rapport à la tangente à M, en* **P***. La droite (QP) est le rayon réfléchi (voir Fig. 2). Lorsque* **P** *décrit M,* **Q** *décrit une courbe W telle que (QP) lui soit normale en* **Q***. W est l'orthotomique de M, relativement à* **S***. Il est équivalent de définir la courbe caustique, que nous noterons dorénavant Γ, relativement à* **S** *comme :*

- *Le développé de W, c'est à dire le lieu des centres de courbure de W [Rutter, 2000].*
- *L'enveloppe des rayons réfléchis.*

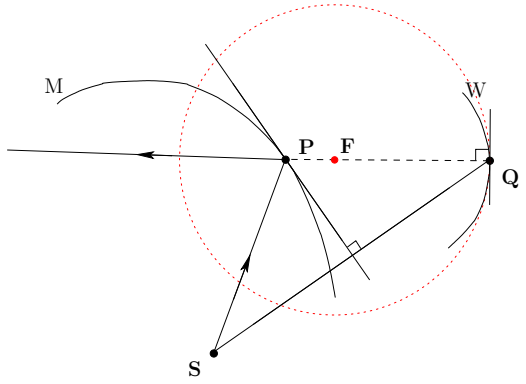

FIG. 2 – **L'orthotomique W de la courbe M, relativement à S, est le lieu des symétriques de S par rapport à chaque tangente à la courbe (ici en P). Le point de la caustique correspondant au point P est F, le centre du cercle de courbure (en pointillés), de W en Q.**

DÉFINITION 2 : *Soient deux courbes f et g, de classe C^n, munies d'une tangente commune en un*

point **P** *commun. On se place dans un repère d'origine* **P** *ayant pour axe des abscisses, cette tangente.* **P** *est alors un point de contact d'ordre n si :*

$$\begin{cases} f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = 0 \quad si \quad 0 \leq k < 2 \\ f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) \quad si \quad 2 \leq k \leq n-1 \\ f^{(n)}(0) \neq g^{(n)}(0) \end{cases}$$

Il existe une et une seule conique $\mathcal{C}$, de contact d'ordre $n \geq 3$ avec M, en **P**, de foyers **S** et **F**. **F** est le point caustique de M en **P**, relativement à **S** (voir Fig. 3).

Pour une courbe lisse M, d'équation paramétrique :

$$M : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \tag{3}$$

où $P = (x\ y)^t \in M$, la courbure de M en **P** est donnée par :

$$k = \frac{|P^{'}P^{''}|}{|P|^3} = \frac{f^{''}(t)}{\sqrt{1+f^{'}(t)^2}^3} \tag{4}$$

avec

$$|P^{'}P^{''}| = \begin{vmatrix} x^{'} & x^{''} \\ y^{'} & y^{''} \end{vmatrix}$$

De ces définitions on peut déduire que M et $\mathcal{C}$ ont la même courbure en **P**. Si k est connu, il est possible de construire la caustique Γ, indépendamment de W.

Nous donnons ici une construction géométrique du foyer **F** à partir de la conique $\mathcal{C}$ mentionnée plus haut. La Fig. 3 illustre les étapes décrites ci-dessous.

- Construire **O**, le centre de courbure de M en **P**, sachant que le rayon de courbure correspondant vérifie $r = \frac{1}{k}$. **O** satisfait l'égalité :

$$\mathbf{O} = \mathbf{P} + |r|\mathbf{N} \tag{5}$$

- Projeter orthogonalement **O** sur (SP) en **u**.

  Projeter orthogonalement **u** sur (PO) en **v**.

  (Sv) est l'axe principal de $\mathcal{C}$.

– Placer F sur (Sv) de sorte que (OP) soit bissectrice de l'angle $\widehat{SPF}$.

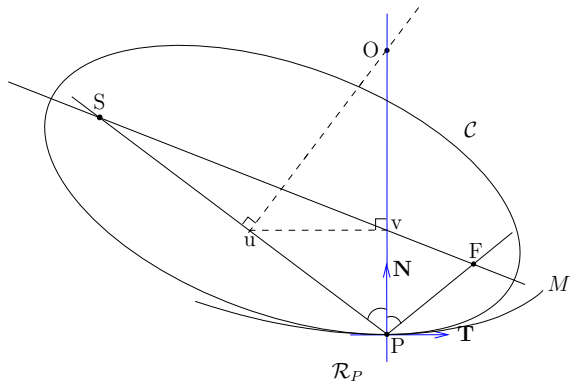

FIG. 3 – **Construction du point caustique F, associé au point courant P à l'aide de la conique $\mathcal{C}$. La source S et le point F sont les foyers de $\mathcal{C}$, O est le centre de courbure de M en P. La normale N et la tangente T en P, permettent de définir le repère local de Frenet, $\mathcal{R}_\mathcal{P}$.**

Suivant les valeurs prises par k, $\mathcal{C}$ est soit une ellipse, soit une hyperbole, soit une parabole. Pour les deux premières, **F** est à une distance finie de **S** ($\mathcal{C}$ est une conique à centre) et $k \neq 0$. Si $k = 0$, **F** est à l'infini et $\mathcal{C}$ est une parabole.

Nous considérons aussi uniquement le cas où **S** est placé à une distance finie de M. Si **S** est à l'infini, les rayons incidents sont parallèles et la construction est différente, mais les propriétés de la caustique restent les mêmes.

Il est plus simple de se placer dans le repère de Frenet, d'origine **P**, que nous noterons R_p. Dans ces conditions, nous avons $\mathbf{O} = (0\ |r|)^t$, car par construction, **N** est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées. L'équation implicite générale de $\mathcal{C}$ s'écrit :

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + y = 0 \tag{6}$$

De laquelle nous tirons le système d'équations suivant :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2\sqrt{b}}\sqrt{\frac{(2ht+1)^2}{b} - 4at^2} - \frac{2ht+1}{2b} \end{cases} \tag{7}$$

En dérivant deux fois et en prenant $t = 0$ nous pouvons calculer la courbure en **P** en utilisant Eq.(4) :

$$y^{'}(t) = \frac{\frac{2ht+1}{b}h - 2at}{\sqrt{b}\sqrt{\frac{(2ht+1)^2}{b} - 4at^2}} - \frac{h}{b} \text{ et } y^{''}(t) = \frac{2a}{(4(ab-h^2)t^2 - 4ht - 1)\sqrt{-4(ab-h^2)t^2 + 4ht + 1}}$$

Ce qui donne en $t = 0$, $y^{'}(0) = 0$ et $y^{''}(0) = -2a$, ainsi la courbure $k = -2a$.

Remarque 3 : Unicité de $\mathcal{C}$

L'unicité de $\mathcal{C}$ est équivalente à celle des paramètres a, h et b de Eq. 6. La courbure k fixe a, nous nous servons d'une propriété des foyers de $\mathcal{C}$ pour obtenir h et b :

un point $\mathbf{S} = (u\ v)^t$ est un foyer de la conique si

$$4(h^2 - ab)(v^2 - u^2) = 4av + 4hu + 1 \tag{8}$$

$$2(h^2 - ab)uv = au - hv \tag{9}$$

L'unicité de h et b est obtenue en résolvant ce système.

Pour ne pas surcharger en détails de calcul, l'obtention des deux précédentes équations vérifiées par le foyer ne seront pas détaillées. Elles découlent de calculs directs sur les propriétés générales d'une conique.

Dans la pratique, la construction de $\mathbf{F}$ ne nécessitera pas la détermination des paramètres de (6). Nous nous contenterons de calculer la courbure en chaque point de la surface dans un repère fixe, d'origine $\mathbf{S}$. Nous nous placerons dans le repère de Frenet pour la construction géométrique. En se basant sur la Fig. 3, les coordonnées de $\mathbf{F}$ dans R_p peuvent être obtenues en écrivant l'expression analytique de toutes les droites apparaissant dans le processus de construction. On obtient alors la caustique Γ, qui est l'ensemble des points $\mathbf{F}$ paramétrés par r selon le système :

$$\Gamma : \begin{cases} x_f = -\frac{y_s^2 x_s |r|}{2y_s(x_s^2+y_s^2)-y_s^2|r|} \\ \\ y_f = \frac{y_s^2|r|}{2(x_s^2+y_s^2)-y_s|r|} \end{cases} \tag{10}$$

Il est à noter que $\mathbf{F}$ ne dépend que de la source $\mathbf{S}$ et de la courbe M par l'intermédiaire de r.

2.2.2 Extension à la troisième dimension

Considérons une surface $\mathcal{M}$, nous souhaitons maintenant obtenir la surface caustique en utilisant la construction géométrique introduite précédemment. Nous pouvons pour cela décomposer $\mathcal{M}$ en différents plans et appliquer pour chacun d'eux la construction précédente. Pour cela il faut que chacun de ces plans

contienne le rayon incident et son rayon réfléchi. Si on se réfère aux lois de réflexion de Snell-Descartes, les seuls plans qui répondent à ce critère sont les plans d'incidence que nous noterons Π_P (voir la Fig. 4 pour une illustration générale du problème).

Le point caustique correspondant au point $\mathbf{P}$ appartient au rayon réfléchi, c'est donc aussi un élément de Π_P. Le point source $\mathbf{S}$ appartient à l'ensemble des plans incidents.

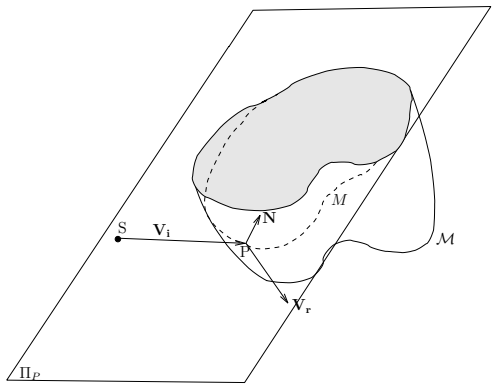

FIG. 4 – **Cas générique de surface 3D : $\mathcal{M}$ est décomposée en courbes planes M, intersections des Π_P avec $\mathcal{M}$. Le point source S, les directions d'incidence $\mathbf{V_i}$, de réflexion $\mathbf{V_r}$ et la normale N sont contenus dans Π_P.**

Le processus pour une surface 3D peut se décomposer en trois points :

- La détermination de la section M de $\mathcal{M}$ par le plan Π_P :

  Le plan d'incidence en $\mathbf{P}$ est le plan défini par le triplet $(\mathbf{P}, \mathbf{N}, \mathbf{V}_i)$. La section M, est donc l'ensemble des points $\mathbf{p}$ vérifiant :

$$M = \Pi_P \cap \mathcal{M} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{M} | \mathbf{N} \times \mathbf{V}_i.(\mathbf{p} - \mathbf{P}) = 0\}$$

  avec $\times$ désignant le produit vectoriel.

- La courbe caustique de la courbe plane M est obtenue en appliquant la méthode proposée dans la section 2.2.1.
- Un changement de repère ramène chaque caustique plane ainsi obtenue dans un repère de référence.

Le vecteur $\mathbf{N}$ se déduit de l'équation de $\mathcal{M}$ car il est le vecteur normal en $\mathbf{P}$ à la surface. Si on dispose

de l'équation paramétrique de $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} : \begin{cases} x(i,j) \\ y(i,j) \\ z(i,j) \end{cases}$$

En posant $\mathbf{I} = (x_i \ y_i \ z_i)^t$ et $\mathbf{J} = (x_j \ y_j \ z_j)^t$ où $x_i = \frac{\partial x}{\partial i}$ (respectivement $x_j = \frac{\partial x}{\partial j}$), on obtient une expression de $\mathbf{N}$: $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{J}}{|\mathbf{I} \times \mathbf{J}|}$.

2.2.3 Surface à symétrie de révolution

Si la surface miroir dispose d'une symétrie de révolution et si la source **S** est placée sur l'axe de révolution (ce qui est une configuration largement utilisée), le calcul des plans d'incidence est facilité car ce sont les plans qui contiennent l'axe.

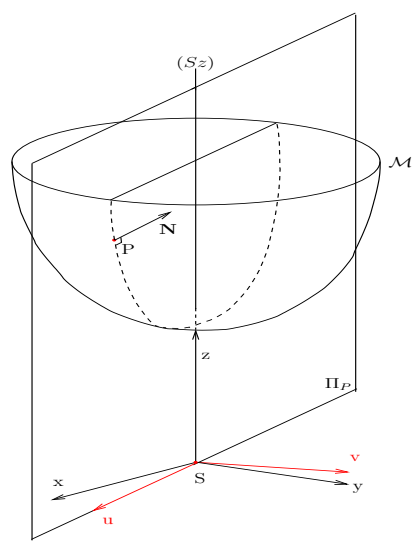

FIG. 5 – **La source S, placée sur l'axe de révolution** (Sz)**, définit les plans d'incidence** Π_P**. P et N appartiennent tout deux à** Π_P**.**

Plaçons-nous dans un repère arbitraire orthogonal d'origine **S**, $E = (\mathbf{S}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, de sorte que (Sz) soit l'axe de révolution de $\mathcal{M}$ (Fig.5). L'équation paramétrique standard de la surface dans ce repère s'écrit

alors :

$$\mathcal{M} : \begin{cases} x(t,\theta) = r(t)\cos\theta \\ y(t,\theta) = r(t)\sin\theta \\ z(t,\theta) = k(t) \end{cases} \tag{11}$$

On déduit l'expression du vecteur normal en $\mathbf{P} = (x\ y\ z)^t$:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{|\mathbf{I}\times\mathbf{J}|}\begin{pmatrix} r^{'}\cos\theta \\ r^{'}\sin\theta \\ k^{'} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r'^2+k'^2}}\begin{pmatrix} -k^{'}\cos\theta \\ -k^{'}\sin\theta \\ r^{'} \end{pmatrix}.$$

Considérons enfin, la rotation d'axe (Sz), d'angle θ, donnée par la matrice

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R permet de nous placer dans le repère du plan d'incidence de direction θ.

Nous définissons ensuite $B = (\mathbf{S}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z})$, le repère obtenu par rotation R du repère E. Les coordonnées de la normale $\mathbf{N}$ dans B deviennent

$$R.\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{r'^2+k'^2}}R\begin{pmatrix} -k^{'}\cos\theta \\ -k^{'}\sin\theta \\ r^{'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r'^2+k'^2}}\begin{pmatrix} -k^{'} \\ 0 \\ r^{'} \end{pmatrix} \tag{12}$$

La composante v de $\mathbf{N}$ est nulle. Par déduction, la droite passant par $\mathbf{P}$ et de direction $\mathbf{N}$ est donc dans le plan $\Pi = (\mathbf{S}, \mathbf{u}, \mathbf{z})$. On a alors $\Pi = (\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{N}) = \Pi_P$.

Dans le cas de figure d'une surface de révolution, il suffit donc de déterminer la caustique pour un plan d'incidence donné et d'exploiter la propriété de symétrie.

3 Tests et simulations

Cette section introduit une étape indispensable qui permet la détermination de la position de la caméra, placée au point source $\mathbf{S}$, par rapport au miroir. Il n'est possible de calculer la caustique de la

surface réfléchissante que si nous disposons d'une estimation fiable de la position de la source.

Dans un second temps, la construction géométrique est examinée à l'aide des quelques exemples de courbes lisses. Leurs profils sont définis sous forme d'équations paramétriques ou implicites. Comme exposé dans la section 2.2.1, seule Eq. (4) est spécifique à M. La courbure en $\mathbf{P}$ implique uniquement les deux premières dérivées par rapport à t, en ce point. Ainsi, si le profil de M est donné sous forme échantillonnée, l'algorithme reste applicable pour peu que le pas d'échantillonnage soit suffisamment faible.

3.1 Estimation de la position de la source

La construction de la caustique implique comme prérequis la connaissance de la position de la caméra, c'est à dire celle du point source $\mathbf{S}$ décrit dans les sections précédentes par rapport au miroir. Deux choix sont possibles. Nous pouvons placer avec la plus grande précision possible, la caméra dans une position prédéfinie lors de la conception du capteur, ou bien estimer a posteriori la position relative entre le miroir et la caméra. Nous préférons le deuxième choix pour des raisons pratiques évidentes.

La méthode d'estimation utilisée est une variante de celle décrite dans [Fabrizio et al., 2002]. Cette méthode de calibrage évite l'utilisation de mires ou de tout autre dispositif extérieur au capteur, le miroir étant l'objet de calibrage. La limitation de la méthode réside dans l'utilisation de deux plans distincts, normaux à l'axe du miroir. Pour éviter cette contrainte, nous avons développé une variante utilisant un seul plan, mais qui présuppose la connaissance des paramètres intrinsèques de la caméra. Le calibrage utilise quatre points coplanaires connus, appartenant au bord supérieur du miroir. Il existe une relation homographique entre le plan image et ce plan. Cette homographie notée H, peut être identifiée avec une projection prespective permettant ainsi de retrouver les paramètres de pose. Si on note P, la projection perspective dont l'expression est $P = K(R\ \mathbf{t})$, K étant la matrice des paramètres intrinsèques, $(R\ \mathbf{t})$, les paramètres de pose. On peut identifier P et H par la relation suivante :

$$H = (\mathbf{h}_1\ \mathbf{h}_2\ \mathbf{h}_3) = \lambda.K(\mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2}\ \mathbf{t}) \text{ où } \lambda \text{ est un réel.} \tag{13}$$

avec $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ les deux premiers vecteurs colonnes de R. La matrice H, restreinte à une transformation perspective par la rotation R, donne les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathbf{h}_1^t K^{-t} K^t \mathbf{h}_2 = 0 \\ &\mathbf{h}_1^t K^{-t} K^t \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^t K^{-t} K^t \mathbf{h}_2 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Si une estimée de K est disponible, il est alors possible de calculer R et $\mathbf{t}$ à partir de Eq. (13). Le lecteur pourra se reporter à [Zhang, 2000, Sturm, 2000] pour une revue complète de ce calcul.

Cette estimation de la position de la caméra permet alors de retrouver les coordonnées exactes de la source $\mathbf{S}$ par rapport au miroir.

3.2 Courbes planes

Soit M la conique définie par ses équations paramétrée et implicite :

$$M : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = b\sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}} - c \end{cases} \tag{15}$$

et

$$f(x, y) = \frac{(y-c)^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \tag{16}$$

ses dérivées première et seconde par rapport à t sont :

$$M^{'} : \begin{cases} x^{'}(t) = 1 \\ y^{'}(t) = \frac{bt}{a^2\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}}} \end{cases} \tag{17}$$

$$M^{"} : \begin{cases} x^{"}(t) = 0 \\ y^{"}(t) = \frac{b}{a^2}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \tag{18}$$

On calcule r en $\mathbf{P}$ d'après (4) :

$$r = \frac{1}{k} = \frac{\sqrt{a^2(a^2+t^2) + b^2t^2}^3}{a^4 b} \tag{19}$$

On se placera dans le repère local de Frenet en $\mathbf{P}$ pour une construction plus facile de $\mathbf{F}$.

La Fig. 6 montre le tracé d'une caustique à réflexion hors axe, c'est à dire que $\mathbf{S}$ n'est pas un point de l'axe de révolution de M. Les paramètres sont $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ et $S = (0.5\ 0.25)^t$.

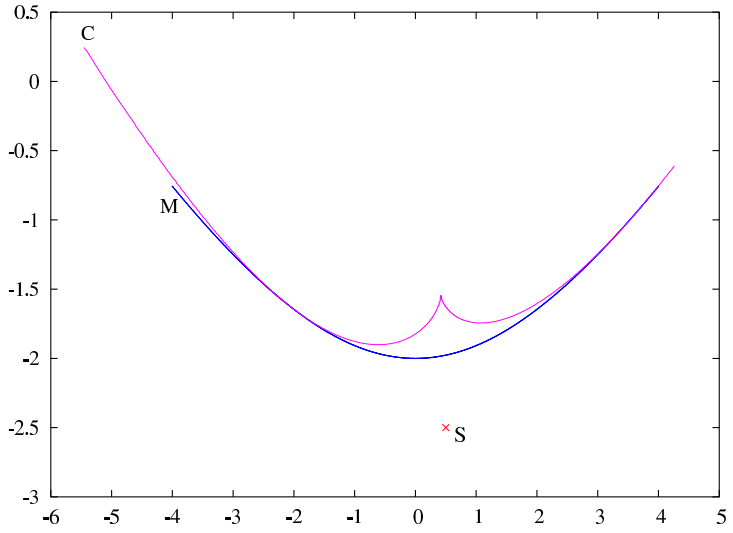

FIG. 6 – **Tracé de la caustique C (violet) d'une hyperbole M (bleu), dans le cas d'une réflexion hors axe. La source S est placé de façon quelconque par rapport à M. On constate le point de rebroussement caractéristique de ces courbes. Enfin l'asymétrie de C témoigne d'une source S n'appartenant pas à l'axe de révolution.**

3.3 Surface de révolution

C'est le cas le plus général que nous pouvons rencontrer : la surface réfléchissante est donnée sous forme de points, aucune équation explicite n'est connue. La courbure en chaque point est calculée numériquement, fournissant ainsi une estimation de la caustique.

Le miroir étudié possède un axe de symétrie. La caméra est placée arbitrairement, elle n'est donc pas nécessairement sur l'axe de révolution. L'origine du repère est choisie au centre de la partie supérieure du miroir. Le foyer de la caméra est estimé avec précision, selon le processus décrit dans la section 3.1, il sera le point source **S** de la surface caustique que nous voulons construire. Les mesures obtenues donnent les coordonnées suivantes : $\mathbf{S} = (-0.3023 \ -0.374 \ -17.261)^t$. Nous pouvons alors construire la caustique selon les principes décrits dans la section 2.2.2. La Fig. 7 montre une reconstruction partielle, plan par plan, de cette caustique selon la configuration expérimentale. Pour cela, un total de 80 plans d'incidence ont été arbitrairement choisis pour obtenir autant de coupes de la surface caustique. Le tracé montre le point de rebroussement que l'on retrouve dans le cas plan.

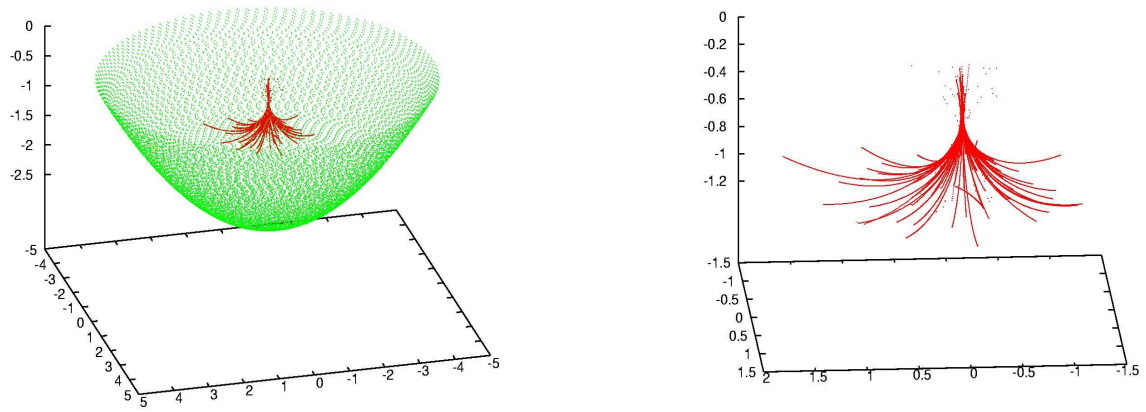

FIG. 7 – **Caustique d'un miroir échantillonné (en rouge). La caméra n'est pas représentée pour des raisons d'échelle, l'ensemble des éléments sont exprimés dans un repère centré sur le sommet du miroir (en vert). La surface caustique est recomposée en calculant 80 coupes du miroir par 80 plan incidents. L'image de droite montre un grossissement sur la caustique. Un léger décalage de la source S, par rapport à l'axe de révolution se traduit par une dissymétrie de la surface caustique obtenue.**

La connaissance de la surface caustique permet de retrouver pour chaque point image, la direction du rayon incident. Pour examiner la qualité de la construction géométrique, nous procédons à une projection inverse d'un ensemble de points formant une mire plane, dont nous connaissons parfaitement la géométrie dans le repère de référence. Cela veut dire que partant des points images obtenus par le capteur et connaissant les propriétés de réflexion du miroir, nous recalculons la position des points réels de la mire. La mire est composée de points régulièrement espacés de 5cm verticalement et horizontalement, ils définissent un plan perpendiculaire à l'axe du miroir, placé à 19cm en dessous de l'origine du repère (banc optique). L'image gauche de la Fig. 8 montre ces points vus depuis le capteur. Les positions réelles de ces points sont donc les intersections des rayons incidents correspondants, avec le plan de la mire. Le résultat de cette reprojection a été superposé à la mire réelle dans l'image de droite de la Fig. 8. L'erreur moyenne de position a été estimée à 2.337mm. Plus nous nous éloignons du centre de l'image, plus nous

constatons que l'erreur de position est grande. Cela est dû à une décroissance de la résolution spatiale du miroir lorsque l'on s'éloigne du centre.

Une deuxième mesure de ce même capteur a ensuite été réalisé, avec cette fois la caméra placée à un point **S**, situé sur l'axe de révolution du miroir, de sorte que le miroir et la caméra soient alignés. Cet alignement est assuré par le procédé de la section 3.1. La mire utilisée est un damier régulier, composé de carrés de dimensions 30cm x 30cm, placé au sol. A partir de l'image de cette mire, prise par le capteur, nous avons appliqué une extraction de contours (les points bleus de l'image de gauche de la Fig. 9). La mire est ensuite reconstituée comme précédemment par reprojection sur le sol. La mire reconstruite sur l'image de droite de la Fig. 9, conserve parfaitement les propriétés géométriques de la mire réelle. Nous constatons une nouvelle fois la perte de résolution du capteur lorsque nous sommes en périphérie du miroir. Cela se traduit encore une fois par une baisse de la densité des points reprojetés lorsque l'on s'éloigne de l'origine.

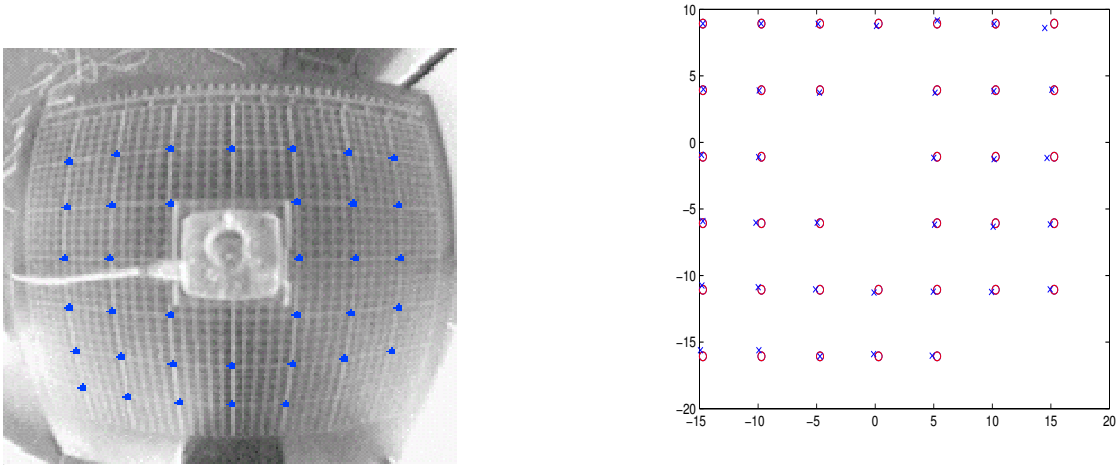

FIG. 8 – **A gauche, un ensemble de points d'une mire observée par le capteur est reprojeté sur un plan de la mire. Le quadrillage réel (symbolisé par des "o"), est superposé aux points reprojetés (symbolisés par des "x") pour faire apparaître les erreurs de projection. L'erreur en position moyenne relevée est de 2.337mm.**

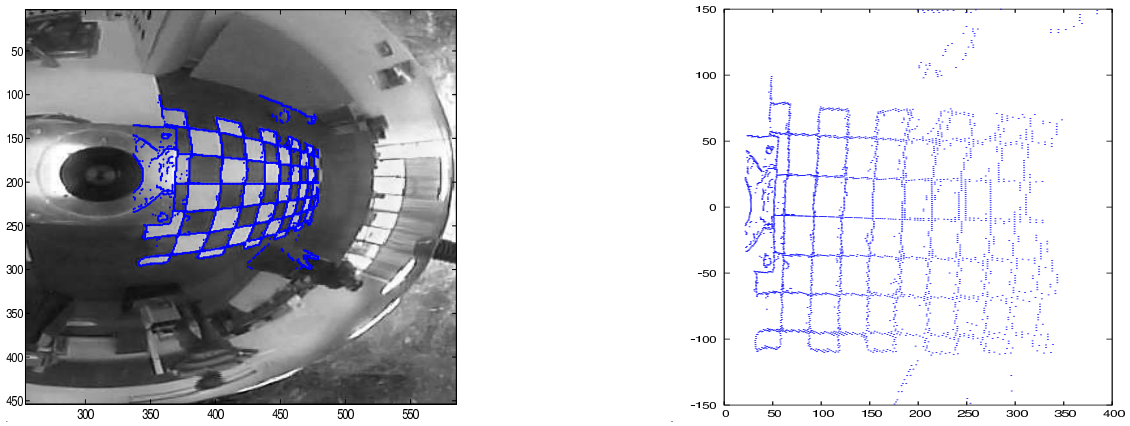

FIG. 9 – **A gauche, une mire observée par le capteur catadioptrique dont la caméra est placée sur l'axe de révolution. A droite, des points images de cette mire sont reprojetés sur le plan du sol. La diminution de la résolution du miroir se traduit par une densité décroissante dûe à l'accroissement de la distance par rapport à l'axe du miroir.**

4 Conclusion

Cet article présente une construction géométrique de la courbe caustique dans le cadre de caméras catadioptriques. Lorsque la contrainte du point focal unique fait défaut, la caustique devient un élément essentiel.

Les méthodes existantes impliquent un important travail de prétraitement qui peut aboutir à la solution exacte de la caustique si le profil du miroir est connu. Cependant, ceci n'est pas garanti dans le cas général où la surface miroir peut ne pas être une surface possédant un axe de symétrie, ou bien définie uniquement par un nuage de point et pour laquelle il n'existe pas d'équation analytique. La méthode géométrique exposée est une approche très flexible car elle n'exploite que les propriétés locales du miroir. La généralisation aux surfaces que nous avons introduite en procédant par découpage plan par plan nous ramène à chaque fois à un cas de courbe plane. Enfin, en fixant pour seule contrainte sur les miroirs, la continuité des surfaces, nous avons montré la flexibilité de la construction.

Les résultats obtenus par des tests pratiques montrent la précision et l'efficacité de la méthode. Les précicions obtenues laissent envisager de nombreuses applications des capteurs catadioptriques sans point focal unique à de nombreuses applications utiles en vision robotique telles que la reconstruction 3D et la

localisation.

Références

[Backstein and Pajdla, 2001] Backstein, H. and Pajdla, T. (2001). On central cameras : A review. In *Proceedings of Computer Vision Winter Workshop, Ljubljana, Slovenian Pattern Recognition Society*, pages 223–233.

[Baker and Nayar, 1998] Baker, S. and Nayar, S. K. (1998). A theory of catadioptric image formation. In *Proceedings of the ICCV*, pages 35–42.

[Bellver-Cebreros et al., 1994] Bellver-Cebreros, C., E.Gómez-González, and Rodrßguez-Danta, M. (1994). Obtention of meridian caustics and catacaustics by means of stigmatic approximating surfaces. *Pure Applied Optic*, 3 :7–16.

[Bruce et al., 1981] Bruce, J., Giblin, P., and Gibson, C. (1981). On caustics of plane curves. *American Mathematical Monthly*, 88 :651–667.

[Burkhard and Shealy, 1973] Burkhard, D. and Shealy, D. (1973). Flux density for ray propagation in geometric optics. *Journal of the Optical Society of America*, 63(3) :299–304.

[Conroy and Moore, 1999] Conroy, J. and Moore, J. (1999). Resolution invariant surfaces for panoramic vision systems. In *Proceedings of ICCV*, pages 392–397.

[Fabrizio et al., 2002] Fabrizio, J., Tarel, P., and Benosman, R. (2002). Calibration of panoramic catadioptric sensors made easier. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Omnidirectionnal Vision*.

[Gaetcher and Pajdla, 2001] Gaetcher, S. and Pajdla, T. (2001). Mirror design for an omnidirectional camera with space variant imager. In *Proceedings of the Workshop on Omnidirectional Vision Applied to Robotic Orientation and Nondestructive Testing (NDT)*.

[Hamilton, 1828] Hamilton, W. (1828). Theory of systems of rays. In *Transactions of the Royal Irish Academy*, volume 15, pages 69–174.

[Hicks and Bajcsy, 2000] Hicks, R. and Bajcsy, R. (2000). Catadioptric sensors that approximate wide-angle perspective projections. In *Proceedings of CVPR*, pages 545–551.

[Hicks et al., 2001] Hicks, R. A., Perline, R. K., and Coletta, M. (2001). Catadioptric sensors for panoramic viewing. In *Proceedings of Int. Conf. on Computing ans Information Technology.*

[J. Gluckman, 1999] J. Gluckman, S. N. (1999). Planar catadioptric stereo : Geometry and calibratio. In *Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 35–42.

[J.S. Chahl, 1997] J.S. Chahl, M. S. (1997). Reflective surfaces for panoramic imaging. *Applied Optics*, 36 :8275–8285.

[K. Yamazawa, 1993] K. Yamazawa, Y. Yagi, M. Y. (1993). Omnidirectional imaging with hyperboloidal projection. In *Proceedings IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1029–1034.

[M. Ollis, 1999] M. Ollis, H. Herman, S. S. (1999). Analysis and design of panoramic stereo vision using equi-angular pixel cameras. Technical report, The Robotic Institute, Carnegie Mellon University, 5000 Forbes Avenue Pittsburgh, PA 15213.

[Mitchell and Hanrahan, 1992] Mitchell, D. and Hanrahan, P. (1992). Illumination from curved reflectors. In *Proceedings of the SIGGRAPH'92.*

[Nalwa, 1996] Nalwa, V. (1996). A true omnidirectionnel viewer. Technical report, Bell Labaratories, Holmdel, NJ 07733, U.S.A.

[Nayar, 1997] Nayar, S. (1997). Catadioptric omnidirectionnal cameras. In *Proceedings CVPR*, pages 482–488.

[Peri and Nayar, 1997] Peri, V. and Nayar, S. K. (1997). Generation of perspective and panoramic video from omnidirectionnal video. In of Perspective ans Panoramic Video from Omnidirectionnal Video, G., editor, *Proceedings of the DARPA Image Understanding Workshop*, volume 1, pages 243–245.

[Rees, 1970] Rees, D. (1970). Panoramic television viewing system. United States Patent No.3,505,465.

[Rutter, 2000] Rutter, J. (2000). *Geometry of Curves.* Chapman & Hall/CRC.

[Sturm, 2000] Sturm, P. (2000). Algorithms for plane based pose estimation. In *Proceedings of the IEEE International conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 706–711.

[Swaminathan et al., 2001] Swaminathan, R., Grossberg, M., and Nayar, S. (2001). Caustics of catadioptric cameras. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*.

[Zhang, 2000] Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22 :11 :1330–1334.